Vordiplom 1, 2000

Klasse F1

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2000/23/507/Di 18.9.00/1400

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 19. September 2000

Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2000

Klasse F1

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

In der folgenden Aufgabe sind die Masse in Metern angegeben. Die Masseinheit dient nur dem Verständnis und darf in der Rechnung weggelassen werden.

In einer Fabrikationshalle hängt ein Rohr in Form eines Kreiszylinders, das ein Förderband enthält. Der äussere Radius beträgt 5 und die Zylinderachse ist durch die folgende Gerade gegeben: $g\,:\ \vec{x}(\lambda) = (-6, -2, 4)^T + \lambda \cdot (12, 16, 4)^T$. Die axiale Abweichung infolge von Temperaturschwankungen wird mit ± 0.03 angegeben.

Ein Ingenieur hat nun die Aufgabe, ein zweites Förderrohr zu bauen, das die Punkte $Q_1(3/5/2)$ und $Q_2(4/16/9)$ verbindet. Die axiale Toleranz soll dieselbe wie bei der ersten Röhre sein.

(a) Berechne den kleinsten Abstand zwischen den theoretischen Achsen und entscheide, ob eine gerade Verlegung des zweiten Rohres überhaupt möglich ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Untersuche, ob die Achse des zweiten Rohres oberhalb oder unterhalb der Achse des schon vorhandenen Rohres verläuft. (Das Resultat ist zu begründen.)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Eine Ebene Φ_1 ist gegeben durch die Punkte $A(1/-2/0)$, $B(3/3/6)$, $C(-1/0/1)$.

Eine zweite Ebene Φ_2 ist bestimmt durch die Vektorgleichung

$$\Phi_2\,:\ \vec{x}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Weiter sei K eine Kugel mit unbekanntem Radius r und Mittelpunkt $M(2/1/2)$.

Der Punkt P hat die Koordinaten $P(2/2/0)$ und der Punkt Q die Koordinaten $Q(-2/0/5)$. Spiegelt man P an Φ_1, so erhält man den Punkt P'.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Bestimme den Kugelradius für den Fall, in dem die Schnittgerade $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$ Tangente an die Kugel ist. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(c) Berechne die Koordinaten von P'. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(d) Untersuche, ob die Gerade $g = \overline{PQ}$ mit der Kugel einen Schnittpunkt hat. (Das Resultat ist zu begründen.)

(e) Untersuche, ob die Geraden s und g windschief sind. (Das Resultat ist zu begründen.)

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1 &= x + y - a\,z && (1)\\
1 &= x - y + 2\,z && (2)\\
1 &= -x + y + b\,z && (3)\\
1 &= -x - y + c\,z && (4)\\
0 &= z && (5)\\
w &= -x + 2\,y - 3\,z && (6)
\end{aligned}
$$

Dabei ist w variabel. Jede der 6 Gleichungen bestimmt bekanntlich geometrisch eine Ebene.

(a) Bestimme a, b und c derart, dass die ersten vier Ebenen sich auf der z–Achse schneiden.

(b) Immer drei Gleichungen der ersten fünf Gleichungen bestimmen einen Schnittpunkt von drei Ebenen. Berechne diese Schnittpunkte, falls sie existieren.

(c) Bestimme die Anzahl der möglichen Schnittpunkte.

(d) Skizziere die Situation. Falls die fünf ersten Ebenen einen (oder mehrere) Körper einschliessen, soll das aus der Skizze ersichtlich sein. Der eingeschlossene Bereich sei mit K bezeichnet.

(e) In $w = -x + 2\,y - 3\,z$ seien $(x/y/z)$ die Koordinaten eines Punktes $P \in K$. Bestimme diesen Punkt so, dass w minimal wird. (Begründe die Lösung!)

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Sei $z_1 = 2 + 4\,i \in \mathbb{C}$.

(a) Löse die Gleichung $z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ sowie die Gleichung $i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$

(b) Stelle die Lösungen der beiden Gleichungen graphisch dar und nummeriere sie je beginnend mit der Basislösung in aufsteigender Reihenfolge.

(c) Löse die folgende Gleichung $z_1 + i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$, die aus Teilen der ersten beiden Gleichungen gebildet worden ist. Stelle diese Lösungen ebenfalls in der Graphik dar.

(d) Beurteile, ob alle Lösungen der dritten Gleichung aus je zwei entsprechenden Lösungen (mit gleicher Nummer) der beiden ersten Gleichungen durch die gleiche Linearkombination gebildet werden können.

(e) Löse die Gleichung $2\,i\,(z_1^2 - z_1) = (z-1)^5 \in \mathbb{C}$

(f) Addiere alle Lösungen der letzten Gleichung und bilde das arithmetische Mittel. Stelle die Lösungen sowie das gewonnene arithmetische Mittel graphisch dar.

(g) Wie lässt sich die gefundene Lage des arithmetischen Mittels erklären?

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte $P_1(2/0)$ und $P_2(0/1)$ sowie $Q_1(1/2)$ und $Q_2(-3/-4)$.

(a) Berechne diejenige Matrix M, die die folgende Abbildung leistet:
$P_1 \longmapsto Q_1,\ \ P_2 \longmapsto Q_2$. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Berechne den Mittelpunkt P_M von $\overline{P_1P_2}$ und suche den Bildpunkt P'_M bei der Abbildung M. Beantworte die Frage, ob $P'_M = Q_M$ gilt. (Begründe die Antwort.)

(c) Entscheide, ob M eine reguläre Matrix darstellt. (Begründe die Antwort.)

(d) Berechne die Eigenwerte von M. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(e) Berechne die Eigenvektoren von M (Näherungen genügen. Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.).

(f) Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis der Eigenvektoren graphisch dar und ebenfalls den Bildvektor. (Skizze.)

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Von einer unbekannten Matrix A kennt man den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1, den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3.

(a) Berechne Matrix A exakt. (Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.)

(b) Berechne die Skalarprodukte der Eigenvektoren $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle,\ j \neq k$. Kommentiere das Resultat.

(c) Berechne die normierten Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von A. (Näherungen genügen.)

(d) Bilde mit den normierten Eigenvektoren die Matrix $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(e) Bilde mit den Eigenwerten λ_i die Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ und berechne

$$X \cdot D \cdot X^{-1} \,.$$

(f) Berechne die Matrix $B = X \cdot D^2 \cdot X^{-1} - A^T$.

(g) Berechne die Eigenwerte von B und kommentiere das Resultat.

(h) Entscheide, ob B regulär ist und begründe die Aussage.

— ENDE — $\diamond$ — FIN —