Diplôme préalable 1, 2000

Classe F1

Mathématiques

Temps : 180 minutes

WIR2000/23/507/Di 18.9.00/1400

Conditions :

- Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.
- Pour écrire il faut un moyen ineffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.
- On demande une représentation de la déduction de la solution claire et propre avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la déduction ne sont pas acceptés.
- Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus de 0.1%.
- Les unités physiques peuvent être omises généralement, sauf avis contraire.
- Les résultats sont à souligner doublement.
- Les parties non valables sont à tracer de manière propre et nette.
- Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les versos des feuilles doivent rester vides. Peut-être elles ne seront pas corrigées !
- **Moyens permis :** Dossiers de cours version abrégéé (résumé), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.
- **Points :** Par devoir, 12 points sont possibles, sauf avis contraire.
- But : Si pour l'examen plus de 6 problèmes sont donnés, il faut en choisir 6 et les résoudre.

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 19 septembre 2000

Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2000

Classe F1

Bonne chance!

Problème 1 **(12 points)**

Les mesures suivantes sont données en mètres. L'unité de mesure sert seulement à la compréhension et peut être omise dans le calcul.

Dans un hall de fabrication, un tube en forme d'un cylindrique circulaire, qui contient une bande transporteuse, pend au plafond. Le rayon extérieur est 5 et l'axe du cylindre est donné par la droite suivante : $g: \vec{x}(\lambda) = (-6, -2, 4)^T + \lambda \cdot (12, 16, 4)^T$. L'écart axial à la suite de fluctuations de température est donné par ± 0.03.

Maintenant un ingénieur a le devoir de bâtir un deuxième tube qui relie les points $Q_1(3/5/2)$ et $Q_2(4/16/9)$. La tolérance axiale doit être la même que pour la première conduite.

(a) Calculer la distance la plus petite entre les axes théoriques et décider si une installation droite du deuxième tube est en effect possible. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Examiner, si l'axe du deuxième tube qui passe au–dessus d'ou au-dessous de l'axe du tube déjà disponible. (Le résultat est à justifier.)

Problème 2 **(12 points)**

Un plan Φ_1 est donné par les points $A(1/-2/0)$, $B(3/3/6)$, $C(-1/0/1)$.

Un deuxième plan Φ_2 est déterminé par l'équation vectorielle Φ_2

$$\Phi_2: \vec{x}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En outre, K soit une sphère avec le rayon inconnu r et le centre $M(2/1/2)$.

Le point P a les coordonnées $P(2/2/0)$ et le point Q les coordonnées $Q(-2/0/5)$. Si on reflète P à Φ_1, on obtient le point P'.

(a) Dessiner la situation.

(b) Déterminer le rayon de la sphère pour le cas, dans lequel la droite d'intersection $s = \Phi_1 \cap \Phi_2$ est tangente à la sphère. (Le chemin de solution doit être visible.)

(c) Calculer les coordonnées de P'. (Le chemin de solution doit être visible.)

(d) Examiner, si la droite $g = \overline{PQ}$ a un point d'intersection avec la sphère. (Le résultat est à documenter.)

(e) Examiner, si les droites s et g sont gauches. (Le résultat est à documenter.)

Problème 3 **(12 points)**

Soient données les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
1 &= x + y - a\,z && (1)\\
1 &= x - y + 2\,z && (2)\\
1 &= -x + y + b\,z && (3)\\
1 &= -x - y + c\,z && (4)\\
0 &= z && (5)\\
w &= -x + 2\,y - 3\,z && (6)
\end{aligned}$$

w est variable. Chacune des 6 équations détermine un plan, comme nous savons.

(a) Déterminer a, b et c de façon à ce que les quatre plans aient une droite d'intersection sur l'axe z.

(b) Toujours trois équations des premières cinq équations déterminent un point d'intersection de trois plans. Calculer ces points d'intersection s'ils existent.

(c) Déterminer le nombre des points d'intersection possibles.

(d) Dessiner la situation. Si les cinq premiers plans enferment un (ou plusieurs) volumes, cela devrait être évident dans le croquis. Le domaine inclus est à appeler K.

(e) Dans $w = -x + 2\,y - 3\,z$ l'expression $(x/y/z)$ décrit les coordonnées du point $P \in K$. Déterminer ce point de façon à ce que w devienne minimal. (La solution est à documenter.)

Problème 4 **(12 points)**

Sei $z_1 = 2 + 4\,i \in \mathbb{C}$.

(a) Résoudre l'équation $z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ ainsi que l'équation $i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$.

(b) Documenter graphiquement les solutions des deux équations et numéroter les solutions commençant par la solution de base dans l'ordre ascendant.

(c) Résoudre l'équation composée suivante $z_1 + i \cdot z_1 = z^5 \in \mathbb{C}$ et représenter les solutions de façon graphique.

(d) Juger si les solutions de la troisième équation peuvent être obtenues toutes par la même combinaison linéaire de deux solutions correspondantes (avec le même numéro) des premières deux équations.

(e) Résoudre l'équation $2\,i\,(z_1^2 - z_1) = (z-1)^5 \in \mathbb{C}$.

(f) Additionner toutes les solutions de la dernière équation et calculer la moyenne arithmétique. Documenter graphiquement les solutions de cette équation et aussi la moyenne arithmétique.

(g) Comment expliquer cette situation géométrique de la moyenne arithmétique ?

Problème 5 **(12 points)**

Soient donnés les points $P_1(2/0)$ et $P_2(0/1)$ ainsi que $Q_1(1/2)$ et $Q_2(-3/-4)$.

(a) Calculer la matrice M qui donne l'application suivante :
$P_1 \longmapsto Q_1,\;\; P_2 \longmapsto Q_2$. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Calculer le centre P_M de $\overline{P_1P_2}$ et trouver le point image P'_M pour l'application M. Répondre à la question s'il vaut $P'_M = Q_M$. (Documenter la réponse.)

(c) Décider, si M représente une matrice régulière. (Documenter la réponse.)

(d) Calculer les valeurs propres de M. (Le chemin de solution doit être visible.)

(e) Calculer les vecteurs propres de M (Il suffit d'approximer. Le chemin de solution doit être visible.)

(f) Représenter le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base des vecteurs propres de façon graphique et aussi le vecteur image. (Esquisse.)

Problème 6 **(12 points)**

On connaît d'une matrice inconnue A le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 1, le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 2 et le vecteur propre $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ lié à la valeur propre 3.

(a) Calculer la matrice A de façon exacte. (Le chemin de solution doit être visible.)

(b) Calculer le produit scalaire des vecteurs propres $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle,\;\; j \neq k$. Commenter le résultat.

(c) Calculer les vecteurs propres normés $\vec{v}_i$ de A. (Il suffit d'approximer.)

(d) Composer avec les vecteurs propres normés la matrice $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

(e) Composer à l'aide des valeurs propres λ_i la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et calculer $X \cdot D \cdot X^{-1}$.

(f) Calculer la matrice $B = X \cdot D^2 \cdot X^{-1} - A^T$.

(g) Calculer la valeur propre de B et commenter le résultat.

(h) Décider si B est régulière et documenter la décision.

— ENDE — ◇ — FIN —