Diplôme préalable 2, 2001

Classe B2

Mathématiques

Temps : 180 minutes

WIR2001/21/RIIc/Lu 10.9.00/1400

Conditions :

- Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.
- Pour écrire il faut un moyen ineffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.
- On demande une représentation de la déduction de la solution claire et propre avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la déduction ne sont pas acceptés.
- Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus de 0.1%.
- Les unités physiques peuvent être omises généralement, sauf avis contraire.
- Les résultats sont à souligner doublement.
- Les parties non valables sont à tracer de manière propre et nette.
- Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les versos des feuilles doivent rester vides. Peut-être elles ne seront pas corrigées !
- **Moyens permis :** Dossiers de cours version abrégéé (résumé), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.
- **Points :** Par devoir, 12 points sont possibles, sauf avis contraire.
- But : Si pour l'examen plus de 6 problèmes sont donnés, il faut en choisir 6 et les résoudre.

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne — 10. séptembre 2001

Examen de diplôme préalable 2 en mathématiques 2001

Classe B2

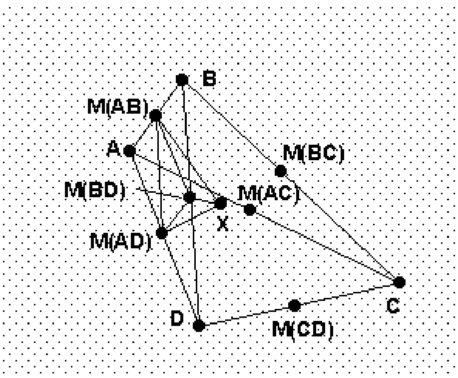
Bonne chance!

Problème 1 (12 points)

Soit donné un tétraèdre $T(ABCD)$ avec les sommets A, B, C, D.
$A = A(1,1,1)$, $B = B(-1,2,3)$, $C = C(5,4,7)$, $D = D(3,8,11)$. Le volume est V.
Nous spécifions par $M(AB)$ le point au milieu de l'arrête $\overline{AB}$, par $M(AC)$ le point au milieu de l'arrête $\overline{AC}$ etc.. Le poit X est calculé par $\overrightarrow{OX} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$.
Les 3 points, chacun au milieu d'une arrête, forment avec X de nouveau un tétraèdre, ce qui est possible de 4 manières :
$T_1(X, M(AB), M(AD), M(BD))$, $T_2(X, M(AC), M(AD), M(CD))$,
$T_3(X, M(AB), M(AC), M(BC))$, $T_4(X, M(BC), M(BD), M(CD))$.
En outre 3 centres d'arrêtes forment un tétraèdre avec le sommet en commun ce qui est aussi possible de 4 manières :
$E_1(A, M(AB), M(AC), M(AD))$, $E_2(B, M(AB), M(BC), M(BD))$,
$E_3(C, M(AC), M(BC), M(CD))$, $E_4(D, M(AD), M(BD), M(CD))$.

(a) Calculer le volume V_1 qui reste si l'on découpe du tétraèdre T les tétraèdres plus petits T_1, T_2, T_3, T_4. $\leadsto$ $V : V_1 = ?$

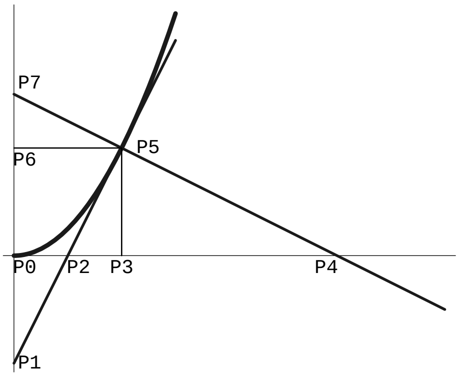
(b) Calculer le volume V_2 qui reste si l'on découpe du tétraèdre T les autres tétraèdres plus petits E_1, E_2, E_3, E_4. $\leadsto$ $V : V_2 = ?$



L'esquisse à côté montre T avec T_1.

Problème 2 **(12 points)**

L'esquisse montre une fonction $f(x) = a\,x^3,\ x \geq 0$. A $P_5(x_0, y = a\,x_0^3)$ on a donné la tangente et la normale. Les points $P_0 \ldots P_7$ ainsi définis marquent des surfaces triangulaires resp. des surfaces dont une ligne de bord est "l'arc de parabôle".
On nomme les surfaces de la façon suivante (faire une esquisse!) :
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1$, $(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2$, $(P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow A_3$,
$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow A_4$, $(P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow A_5$, $(P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow A_6$.
Calculer les rapports des surfaces suivantes. Examiner comme il faut choisir n afin que le rapport respectif soit indépendant de x_0. Examiner aussi l'influence de a.



(a) $A_1 : A_2$
(b) $A_4 : A_2$
(c) $A_4 : A_3$
(d) $A_4 : A_5$
(e) $A_4 : A_6$
(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

Problème 3 **(12 points)**

(a) Un gâteau rond au contenu $A = 2$ soit dédoublé. Un des morceaux au contenu A_0 qui sont crées à cette occasion soit encore partagé en deux. A cette occasion deux nouveaux morceaux plus petits au contenu A_1 sont crées. Un d'entre eux est aussi partagé en deux. A cette occasion deux nouveaux morceaux plus petits au contenu A_2 sont crées. Un d'entre eux est aussi partagé etc., à ce qu'il y ait théoriquement une série infinie de pièces.

Ecrivez la série $A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ ainsi obtenue de façon correcte avec des nombres. De quel type de série s'agit–il ?

(b) Dans un diagramme, on dessine la fonction constante A_0 sur l'intervalle $(0, 1]$, ensuite on dessine la fonction constante A_1 sur l'intervalle$(1, 2]$, puis la fonction constante A_2 sur l'intervalle $(2, 3]$ etc.. Ainsi on obtient une fonction dont le graphe a la forme d' un escalier qu'on peut aussi interpréter comme diagramme de bâton. Dessiner le diagramme et calculer le contenu sous la courbe, c.-à.-d. le contenu de tout les bâtons.

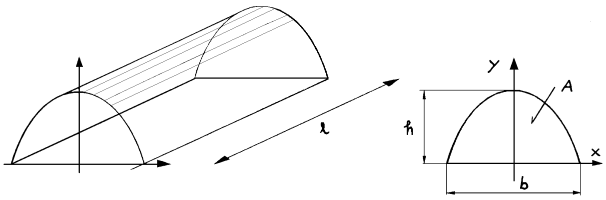
(c) Dessiner dans le diagramme fait sur $(0, \infty)$ encore la fonction $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1}$. Calculer le contenu de la surface entre les bâtons et la courbe de f.

(d) Un gâteau rond au contenu $A = 3$ soit divisé en trois parties. Un des morceaux au contenu B_0 qui sont crées à cette occasion soit mangé, un deuxième soit de nouveau divisé en trois parties. A cette occasion trois nouveaux morceaux plus petits au contenu B_1 sont crées. Un d'entre eux soit mangé, un deuxième soit de nouveau divisé en trois parties. A cette occasion, trois nouveaux morceaux plus petits au contenu B_2

sont crées. Un d'entre eux soit mangé, un autre à son tour divisé en trois parties etc., jusqu'à ce il y ait théoriquement une série infinie de pièces, bien qu'une quantité de pièces infinie ait été mangé.

Ecriver la série $B_0 + B_1 + B_2 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k$ des pièces non mangées ainsi obtenue de façon correcte avec des nombres et calculer la somme exacte.

Problème 4 **(12 points)**



La fonction $f(x) = a\,x^4 + h$ avec $f(0) = h$ et $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ décrit la coupe transversale d'un tunnel d'après le croquis ci–contre.
Il est $h = 3.5\,m$, $b = 6.5\,m$ et $l = 20\,km$.

(a) Calculer $f(x)$. Faire une esquisse exacte du profil du tunnel.
(b) Calculer le volume à enlever lors de la construction du tunnel.
(c) Comment changer la hauteur h, si a reste le même, afin que le volume à enlever soit double ? (Attention : Si h est changé, b est aussi changé !)

Problème 5 **(12 points)**

Nous connaissons la dérivée $f\,'(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3\,x$ d'une fonction inconnue $f(x)$, dont nous savons cependant qu'il est $f(0) = 5$.

(a) Calculer $f(x)$. Faire une esquisse de $f(x)$ sur $I = [-5, 5]$.
(b) Calculer les places de valeur extrêmes de $f(x)$ où la tangente est horizontale.
(c) Calculer les zéros de $f(x)$.
(d) Calculer $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Problème 6 **(12 points)**

Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Ils donnent le même nombre de points. Tous les pas intermédiaires de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.

(a) Intégrer à la main : $\int\limits_{1}^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = ?$
(b) Pour quelles valeurs de $x \in [0, \pi]$ la courbe de $x \cdot \cos(x)$ a la pente 1 ?
(c) Différencier à la main : $\dfrac{d}{d\,x}(x \cdot e^x - e^{x^2}) = ?$ $\quad x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = ?$
(d) Chercher à la main une fonction antidérivée à : $f(x) = x \cdot \sin(x^2) - \cos(2\,x) + \dfrac{2}{3\,x}$

Problème 7 **(12 points)**

Le graphe de la fonction $f(x) = e^{-x}$ pivote autour de l'axe x. Il se forme un corps de révolution qu'on peut imaginer en tant que colonne.

(a) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = 1$

(b) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = \infty$

(c) Comment ext–ce qu'il faut choisir x_0 afin que le volume du corps de révolution entre $x = 0$ et $x = x_0$ devienne égal à $\frac{\pi}{4}$?

— FIN —