Vordiplom 1, Algebra, 2002

Klasse E1a - Elektrotechnik

Mathematik

Zeit 180 Minuten

WIR2002/604/18/Di 10.9.02/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 10. September 2002

Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2002

Klasse E1a

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Ein Würfel steht mit einem Eckpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Seine Raumdiagonale durch diesen Eckepunkt fällt mit der z–Achse zusammen, sodass ein weiterer Eckpunkt auf der positiven z–Achse liegt. Eine weitere Raumdiagonale liegt in der (x, z)–Ebene und schneidet die negative x–Achse. Berechne die Eckpunkte.
Hinweis: Rechne zuerst mit der Kantenlänge 1.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Sei $d, h > 0$. Durch $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ ist ein reguläres Tetraeder gegeben.

(a) Berechne x_1, y_1, d und h.

(b) Zeige die Berechnung des Seiten- resp. Flächenwinkels des Tetraeders mit Vektoren.

(c) Zeige die Berechnung des Kantenwinkels des Tetraeders mit Vektoren. (Winkel zwischen einer Kante und der durchstossenen Seite).

(d) Entscheide, ob es mit einer Anzahl regulärer Tetraeder durch Zusammenleimen längs einer Kante gelingt, einen konvexen Körper zu bauen.

(e) Berechne das Volumen des Tetraeders.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Von einer Matrix M kennt man die Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, und die zugehörigen Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3.

Geg.: $$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

(a) Berechne M exakt.

(b) Berechne das Bild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.

(c) Berechne das Urbild von $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.

Fortsetzung $\rightsquigarrow$

(d) Berechne das Bild von $\lambda_1^2 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3^2 \cdot \vec{x}_3$.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Sei $$h(z) = -\frac{(-z+1)\,(z+1)}{(\bar{z}-1)\,(\bar{z}+1)}$$

(a) Berechne $h(i)$.

(b) Berechne $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}})$.

(c) Untersuche, für welche Punkte $\in \mathbb{C}$ die Gleichung $\Im(h(z)) = 0$ richtig ist.
$\Im \rightsquigarrow$ Imaginäranteil ...

(d) Skizziere $h(i-1)$, $h(i-2)$, $(h(i-1))^2$, $(h(i-2))^2$.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Ebenen:

$$\Phi_1 :\ 4\,x - 2\,y + 5\,z - 6 = 0,\ \ \Phi_2 :\ 2\,x + 3\,y + 4\,z + 2 = 0,\ \ \Phi_3 :\ -x + y - 8\,z + 7 = 0$$

(a) Berechne den Schnittpunkt S.

(b) Sei $\Phi_4(q) :\ -6\,x + 9\,y - q\,2\,z - 2 = 0$

Berechne q so, dass $\Phi_4(q)$ durch S geht.

(c) Für welche(s) q ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und S gleich 1?

(d) Für welches q ist der Abstand zwischen $\Phi_4(q)$ und S gleich 10?

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

(a) Vereinfache $(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})$ so weit wie möglich.

(b) Sei $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 18$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 12$

Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(c) Berechne mit dem letzten Resultat $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$.

(d) Berechne $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$ für $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = k$.

— ENDE —