Diplôme préalable 1, algèbre 2002

Classe E1A Electrotechnique

Mathématiques

Temps : 180 minutes

WIR2002/18/604/Ma 10.9.00/0800

Conditions :

- Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.

- Pour écrire il faut un moyen ineffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.

- On demande une représentation de la déduction de la solution claire et propre avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la déduction ne sont pas acceptés.

- Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus de 0.1%.

- Les unités physiques peuvent être omises généralement, sauf avis contraire.

- Les résultats sont à souligner doublement.

- Les parties non valables sont à tracer de manière propre et nette.

- Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les versos des feuilles doivent rester vides. Peut-être elles ne seront pas corrigées !

- **Moyens permis :** Dossiers de cours version abrégéé (résumé), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.

- **Points :** Par devoir, 12 points sont possibles, sauf avis contraire.

- But : Si pour l'examen plus de 6 problèmes sont donnés, il faut en choisir 6 et les résoudre.

Haute école spécialisée bernoise, école d'ingénieurs Bienne 10. séptembre 2002

Examen de diplôme préalable 1 en algèbre 2002

Classe E1A

Bonne chance!

Problème 1 **(12 points)**

Un cube est placé dans un système de coordonnées de façon qu'il touche l'origine avec un de ses sommets. Sa diagonale par le centre et ce sommet coïncide avec l'axe z de façon qu'un autre sommet se trouve sur l'axe z positive. Une autre diagonale par le centre est placée dans le plan (x, z) et passe par l'axe x négative. Calculer les sommets.
Indication : Travailler d'abord avec une arête de longueur 1.

Problème 2 **(12 points)**

Soit $d, h > 0$. Par $P_1(0/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$, $P_3(-\frac{1}{2}/d/0)$, $P_4(x_1/y_1/h)$ on a donné un tétraèdre régulier.

(a) Calculer x_1, y_1, d et h.
(b) Montrer le calcul de l'angle entre deux plans de surface du tétraèdre avec des vecteurs.
(c) Montrer le calcul de l'angle entre une arête et le plan de surface du tétraèdre qu'il transperce (avec des vecteurs).
(d) Décider si on arrive à construiere un corps convexe en colant un nombre de tétraèdres réguliers le long d'une arête.
(e) Calculer le volume du tétraèdre

Problème 3 **(12 points)**

D'une matrice M on connaît les vecteurs propres $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, et les valeurs propres correspondantes λ_1, λ_2, λ_3.

Donné: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

(a) Calculer M de façon exacte.
(b) Calculer l'image de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.
(c) Calculer l'original de $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$.
(d) Calculer l'image de $\lambda_1^2 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3^2 \cdot \vec{x}_3$.

Problème 4 **(12 points)**

Soit $$h(z) = -\frac{(-z+1)\,(z+1)}{(\bar{z}-1)\,(\bar{z}+1)}$$

(a) Calculer $h(i)$.

(b) Calculer $h(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}})$.

(c) Calculer les points $\in \mathbb{C}$ pour lesquels l'équation $\Im(h(z)) = 0$ est correcte.
$\Im \rightsquigarrow$ Partie imaginaire...

(d) Faire l'esquisse de $h(i-1)$, $h(i-2)$, $(h(i-1))^2$, $(h(i-2))^2$.

Problème 5 **(12 points)**

Soient donnés les plans :

$$\Phi_1 :\ 4\,x - 2\,y + 5\,z - 6 = 0,\ \ \Phi_2 :\ 2\,x + 3\,y + 4\,z + 2 = 0,\ \ \Phi_3 :\ -x + y - 8\,z + 7 = 0$$

(a) Calculer le point d'intersection S.

(b) Soit $\Phi_4(q) :\ -6\,x + 9\,y - q\,2\,z - 2 = 0$

Calculer q de façon que $\Phi_4(q)$ passe par S.

(c) Comment est–ce qu'il faut choisir q pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et S soit 1 ?

(d) Comment est–ce qu'il faut choisir q pour que la distance entre $\Phi_4(q)$ et S soit 10 ?

Problème 6 **(12 points)**

(a) Simplifier $(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})$ tant que possible.

(b) Soit $|\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 18,\ \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 12$

Calculer l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

(c) Calculer à l'aide du dernier résultat $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$.

(d) Calculer $|(5\,\vec{a} + 2\,\vec{b}) \times (3\,\vec{a} - 7\,\vec{b})|$ pour $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = k$.

— Fin —