Vordiplom 2, 2003

Klasse B2

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2003/12/RIIc/Mo 8.9.03/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 8. September 2003

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2003 Klasse B2

Viel Glück !

Löse die folgenden 6 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{cos(\frac{x}{2} - 1)^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $\int f(x)\,dx = \,?$

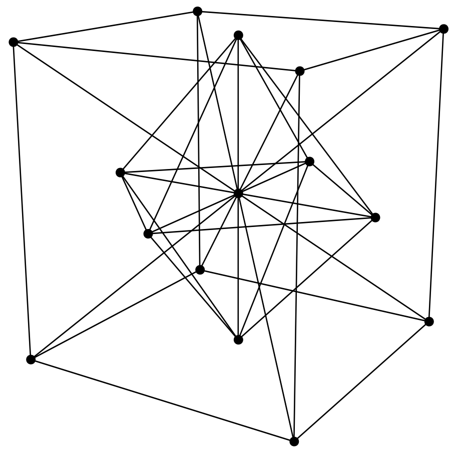
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = 4\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}} \leadsto \int\limits_\pi^e f(x)\,dx = \,?$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$ mit eingeschriebenem Oktaeder (vgl. Abbildung).

(a) Leite eine Formel für den Winkel α zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels her und berechne den Winkel.

(b) Im Würfel ist ein Oktaeder derart eingeschrieben, dass die Oktaederecken mit den Mittelpunkten der Würfelseitenflächen zusammenfallen (vgl. Abbildung oben). Leite eine Formel für den Winkel β zwischen zwei benachbarten Oktaederseitenflächen her und berechne den Winkel.

(c) Suche eine Beziehung zwischen α und β. Was ist der Zusammenhang zur Dualität von Würfel und Oktaeder?

(d) Leite folgende Verhältnisse exakt her:

i. Inhalt des Volumens des Würfels : Inhalt des Volumens des Oktaeders ?

ii. Inhalt einer Seitenfläche des Würfels : Inhalt einer Seitenfläche des Oktaeders ?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (x - a) \cdot x^2$.

(a) Skizziere die Funktion für $a = 1 \rightsquigarrow f_1(x)$.

(b) Berechne für beliebiges a den Funktionswert für $x = a$. Berechne an dieser Stelle dann die Ableitung $f_a'(x)$ sowie den Steigungswinkel der Tangente.

(c) Wie muss a gewählt werden, so dass der Steigungswinkel der Tangente für $x = a$ im Bogenmass gleich $\pi/4$ ist?

(d) Berechne für beliebiges a die Lage eines allfälligen relativen Minimums von $(x_1, f_a(x_1))$.

(e) Berechne für beliebiges a den Flächeninhalt A unter der Kurve von $f_a(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = a$.

(f) Was ist bemerkenswert am Verhältnis $A : f_a(x_1)$?

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Wir betrachten die Funktionen $g_a(x) = a - x^2$ und $h_a(x) = a - x^4, \ \ a > 0.$

(a) Berechne die Nullstellen von $g_a(x)$ und $h_a(x)$ und skizziere die Graphen für ein beliebig gewähltes a. (Interessant für die Skizze wäre z.B. die Wahl $a = 16$.)

(b) Die Graphen von g_a und h_a werden zwischen ihren jeweiligen Nullstellen um die x–Achse rotiert. Berechne die beiden entstehenden Volumeninhalte V_g und V_h der Rotationskörper.

(c) Berechne $a = a_0$ so, dass $V_g = V_h$ gilt.

(d) Berechne das Verhältnis der beiden rotierten Flächeninhalte unter den Kurven von g_a und h_a.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Wir betrachten $f(x, a, b) = x^2 + a\,x + b$ und dazu

$$\vec{v}_1(x, a, b) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, a, b) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2(x, a, b) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ f(x + 1, a, b) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere $f(x, 1, 1)$ sowie $\vec{v}_1(-0.5, 1, 1)$ und $\vec{v}_2(-0.5, 1, 1)$.

(b) Berechne das Skalarprodukt $s(x, a, b) := \langle \vec{v}_1(x, a, b), \vec{v}_2(x, a, b) \rangle$.

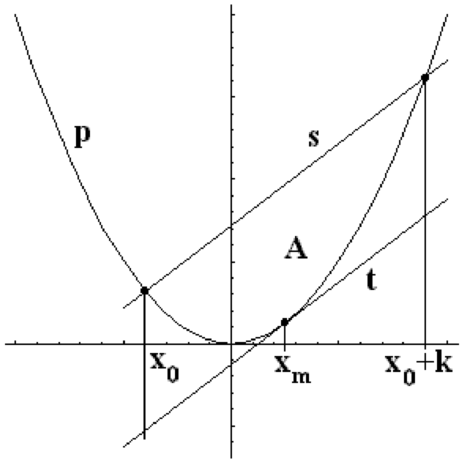
(c) Skizziere den Graphen von $s(x, 1, 1)$.

(d) Suche mit Hilfe der Differentialrechnung allfällige Extrema und Wendepunkte von $s(x, 1, 1)$.

(e) Unteruche, ob es einen Wert x so gibt, dass $\vec{v}_1(x, 1, 1) \perp \vec{v}_2(x, 1, 1)$ gilt.

(f) Unteruche, ob es einen Wert x so gibt, dass $\vec{v}_1(x, a, 0) \perp \vec{v}_2(x, a, 0)$ gilt.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**



Gegeben ist die Funktion $p(x) = a\,x^2$ sowie die Werte x_0 und k (vgl. Abbildung). Durch die Punkte $P_1(x_0/p(x_0))$ und $P_2((x_0+k)/p(x_0+k))$ wird die Gerade s ($\rightsquigarrow$ Sehne $\overline{P_1P_2}$) gelegt. Diese hat die Steigung $m = m(x_0)$, welche von der Wahl von x_0 abhängt.
Sei t diejenige Tangente an die Parabel p, die die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ hat wie $s(x)$.

(a) Berechne die Funktionsgleichung der Sehne $s(x) = m\,x + b = m(x_0)\,x + b(x_0)$.

(b) Berechne die Koordinaten des Punktes $P_3(x_m/p(x_m))$ desjenigen Punktes, in dem die Tangente die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ wie die Sehne s hat.

(c) Berechne die Funktionsgleichung der Tangente $t(x) = m\,x + c = m(x_0)\,x + c(x_0)$.

(d) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche A zwischen der Kurve p und der Sehne s (von x_0 bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn x_0 verändert wird.

(e) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen der Sehne s und der Tangente t (Trapezfläche T von x_0 bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn x_0 verändert wird.

(f) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte von T und A. Untersuche, wie das berechnete Verhältnis ändert, wenn x_0 verändert wird.

— ENDE —