Vordiplom 1, Algebra, 2003

Klasse E1a - Elektrotechnik

Mathematik

Zeit 180 Minuten

WIR2003/604/16/Di 9.9.03/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 9. September 2003

Vordiplomprüfung 1 in Algebra 2003

Klasse E1a

Viel Glück !

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Betrachte die rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = 1,\;\; a_2 = 1,\;\; a_3 = 1,\;\; a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} - a_{n-3}$$

Die Folgeglieder lassen sich wie folgt mit Hilfe einer Matrixmultiplikation gewinnen:

$$\vec{u}_n = \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M \cdot \vec{u}_{n-1}$$

Setzen wir $b_{n-1,n} := \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $b_{n-2,n} := \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots$, so können wir nach einer Streckung von $\vec{u}_n$ und $\vec{u}_{n-1}$ mit a_n^{-1} schreiben:

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} b_{n-2,n} \\ b_{n-1,n} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{n-3,n} \\ b_{n-2,n} \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix} = M \cdot \vec{w}_n$$

(a) Berechne in einer Tabelle $a_1, \ldots, a_{20}$ sowie v_{18}, v_{19}, v_{20} und w_{18}, w_{19}, w_{20} numerisch. Was stellt man fest?

(b) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

(c) Wir nehmen einmal an, dass die Werte $b_{n-k,n}$ für $n \to \infty$ konvergieren. (Eine genaue Untersuchung der Konvergenzfrage überspringen wir hier.) Dann können wir für grosse n schliessen:

$$b_{n-2,n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \approx b_{n-1,n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \;\Rightarrow\; \frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = b_{n-2,n-1} \cdot b_{n-1,n} \approx b_{n-1,n}^2$$

Zeige entsprechend $b_{n-3,n} \approx b_{n-1,n}^3$. Leite daraus eine Beziehung zwischen $\vec{v}_n$ und $\vec{w}_n$ her. Welchen Zusammenhang mit den Eigenwerten und Eigenvektoren lässt sich jetzt vermuten?

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben seien der Eigenvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ sowie der Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 zu einer Matrix M.

(a) Komponiere die Matrix M.

(b) Sei $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Vektoren $\vec{v_1} = M \cdot \vec{v_0}$, $\vec{v_2} = (M \cdot M) \cdot \vec{v_0} = M \cdot \vec{v_1}$, $\vec{v_3} = ((M \cdot M) \cdot M) \cdot \vec{v_0} = M \cdot \vec{v_2}$, $\vec{v_4} = \ldots = M \cdot \vec{v_3}$.

(c) Trage $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{v}_0$, $\ldots$, $\vec{v}_3$ in eine Skizze ein. Was stellt man fest?

(d) Gegeben ist die Matrixgleichung $X \cdot (M - E) = X - E$. Lässt sich aus dieser Gleichung X berechnen? (Die Antwort ist zu begründen.)

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u+1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 2 \\ -u \end{pmatrix}.$$

Damit bilden wir die Matix $M = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$

(a) Berechne $\det(M)$ von Hand.

(b) Löse das Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{v}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

(c) Für welches u hat das obige Gleichungssystem keine eindeutige Lösung? Untersuche, ob in einem solchen Fall unentlich viele Lösungen oder gar keine Lösung vorliegt.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Sei $\quad z_1 = 3 - i, \;\; z_2 = 3 + i, \;\; z_3 = 4 + i.$

(a) Berechne die Lösungen der Gleichung $x^4 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \bar{z}_3.$

(b) Berechne die Lösungen der Gleichung $1 = x^4 \cdot \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \bar{z}_3.$

(c) Trage alle gefundenen Lösungen in eine Skizze ein, die auch den Einheitskreis enthält.

(d) Was ist über die Abstände der Lösungen vom Ursprung und ihre gegenseitigen Beziehungen zu sagen?

(e) Was ist über die Winkel der Lösungen im Polarkoordinatensystem und ihre gegenseitigen Beziehungen zu sagen?

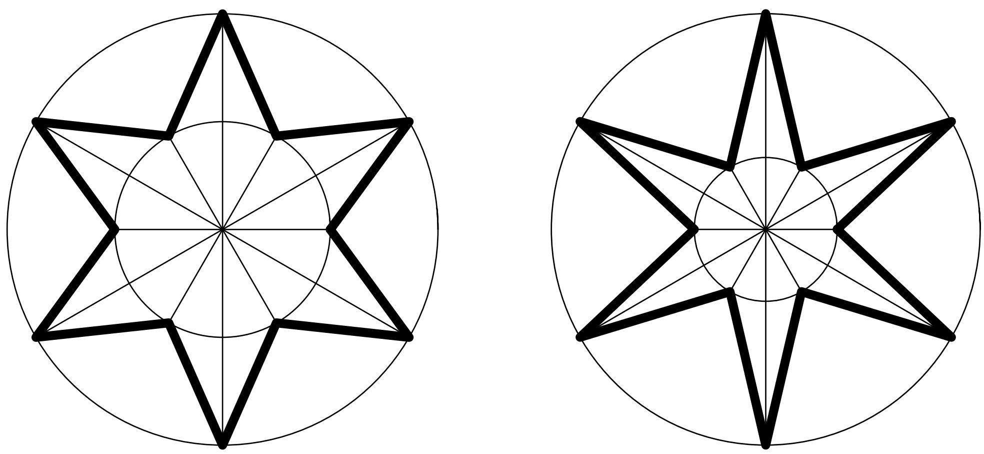
Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

(a) Untersuche mit der Methode der vollständigen Induktion die folgende Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k = (\sum_{k=1}^{n} k) \cdot (1 + \sum_{k=1}^{n} k)$$

Die folgende bekannte Formel darf dabei verwendet werden: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}.$

(b)

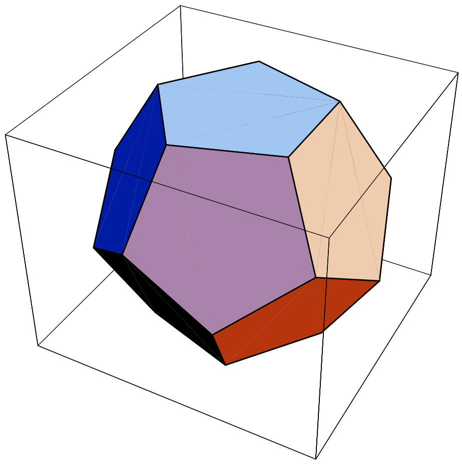


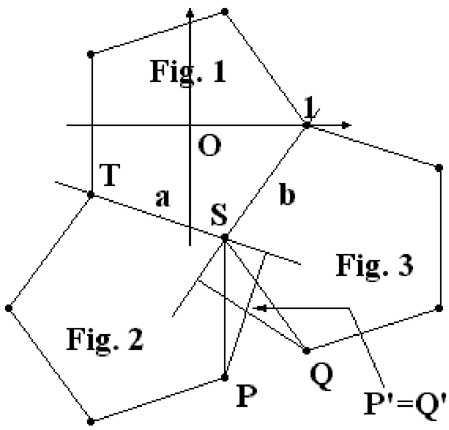
Berechnung mit Hilfe des Flächenprodukts:

i. Radien: $r_1 = 1, \;\; r_2 = 2$
$\rightsquigarrow$ Flächeninhalt des Sterns = ?

ii. Radien: $r_1 = a, \;\; r_2 = b$
$\rightsquigarrow$ Flächeninhalt des Sterns = ?

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**





Ein Dodekaeder (vgl. Bild links) liegt mit einer Fläche in der (x, y)-Grundebene so im Koordinatensystem, wie das Bild rechts (Fig. 1) zeigt, wo ein Teil einer Abwicklung wiedergegeben ist. Wir nehmen an, dass der Umkreisradius von Fig. 1 gleich 1 sei.
Um das Dodekaeder zu gewinnen, werden die gezeigten Flächen Fig. 2 um die Kante a und Fig. 2 um die Kante b so hochgeklappt, bis sich die entsprechenden Kanten mit den Punkten P und Q decken. Die beiden Punkte wandern dabei in je einer erstprojizierenden Ebene Φ_P und Φ_Q nach oben $\Rightarrow$ $P' = Q'$.

(a) Berechne die Koordinaten der Punkte S und T sowie der Punkte P und Q.

(b) Berechne die Kantenlänge des Dodekaeders mit dem Flächenumkreisradius 1.

(c) Berechne den Punkt $P' = Q'$.

(d) Berechne den Winkel zwischen zwei aneinanderstossenden Dodekaederflächen.

— ENDE —