Vordiplom 2, 2004

Klasse AV02-1

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2004/10/Bu-Atelier/Mo 6.9.04/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz Biel und Burgdorf,
6. September 2004

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2004 — Klasse AV02-1

Viel Glück !

Löse die folgenden 6 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=1} = \,$ *Steigung der Kurve* $\Rightarrow$ *Steigungswinkel* $\alpha = \,?$

iv. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(\frac{x}{3} - 3)^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $\int f(x)\,dx = \,?$

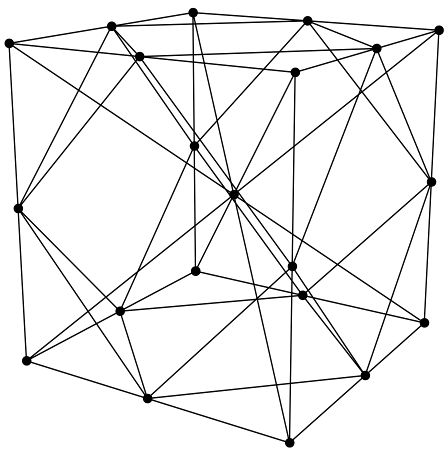
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+2)\,(x-2)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = 7\ln(x) - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}} \rightsquigarrow \int\limits_1^e f(x)\,dx = \,?$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$. Durch die Verbindung benachbarter Kantenmittelpunkte entsteht an jeder Ecke nach aussen je ein nicht reguläres Tetraeder (vgl. Abbildung).

(a) Berechne das Volumen eines Tetraeders an einer Würfelecke. (Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(b) Berechne das Volumen des Restkörpers, welcher durch wegschneiden der Tetraeder vom Würfel entsteht.

(c) Berechne die Oberfläche dieses Restkörpers.
(Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(d) Um welche Körperart handelt es sich beim Restkörper?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Hans und Max wollen sich ein Bild von der Umgebung machen, in der sie eine Überbauung am Rande einer Stadt planen wollen. Max startet vom Hotel aus zur Stadterkundung zu Fuss mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit in flachem Gelände. 50 Minuten später startet Hans vom Hotel aus zur selben Tour, ebenfalls mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit. Nach 12 km holt Hans Max ein (nach der bis jetzt zurückgelegten Strecke s_1). Nach weiteren 50 Minuten ist Hans 1 km weiter als Max.

(a) Skizziere die Funktionen für $s_{Max}(t) = v_{Max} \cdot t$ und $s_{Hans}(t) = v_{Hans} \cdot t$ soweit es die Angaben schon erlauben.

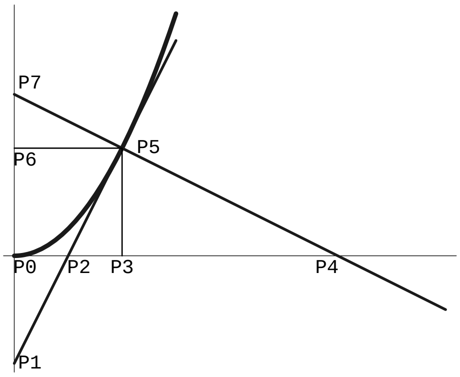
(b) Berechne v_{Max} und v_{Hans}.

(c) Mit welcher Geschwindigkeit $v_{Hans,2}$ müsste Hans gehen, um Max schon auf halber Strecke s_1 einholen zu können? (Kommentar zu $v_{Hans,2} : v_{Hans}$?)

(d) Wir ersetzen Hans und Max durch quaderförmige Becken A und B. Statt Geschwindigkeit haben wir dann Sinkgeschwindigkeit bei auslaufendem Wasser. An Stelle von km müssen wir jetzt die Sinkhöhe in cm verrechnen. Wie gross wäre dann v_A und v_B?

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

In der Skizze sehen wir die Funktion $f(x) = a\,x^2,\ x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^2)$ sind die Tangente und die Normale gezeichnet. Es entstehen Punkte $P_0 \ldots P_7$, welche Dreiecksflächen resp. Flächen definieren, deren eine Begrenzungslinie der Parabelbogen oder die gezeichneten Geradenstücke sind.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Flächen(mache eine Skizze!):



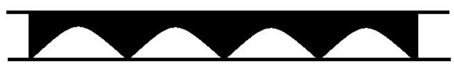
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow\ A_1,$
$(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow\ A_2,$
$(P_0P_1P_2P_5P_0) \rightsquigarrow\ A_3,$
$(P_0P_5P_7P_6P_0) \rightsquigarrow\ A_4.$

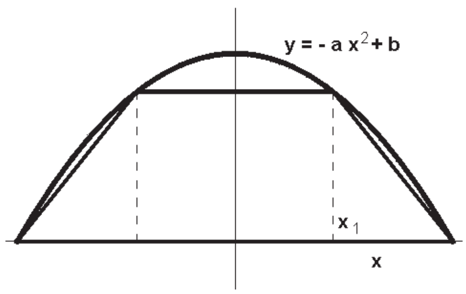
(a) Berechne die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte ($P_3 = P_3(x_0, 0)$).
   i. $A_1 : A_2 = ?$
   ii. $A_4 : A_3 = ?$

(b) Untersuche den Einfluss von a auf die Flächenverhältnisse.

(c) Gibt es ein x_0, für das $\overrightarrow{P_1P_4} \perp \overrightarrow{P_2P_7}$ ist? (Hinweis: Skalarprodukt.)

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**





In einer Stadt steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle gebaut werden mit ebenen Wänden und ebener Decke (vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für a und b sind aus der Bogenhöhe 10 *Meter* und der Bogenbreite auf Bodenniveau 20 *Meter* zu bestimmen. Vorne und hinten (Stirnseiten) sind die Wände vertikal und bündig zur Brücke. Die Stirnseiten der Halle werden verglast.

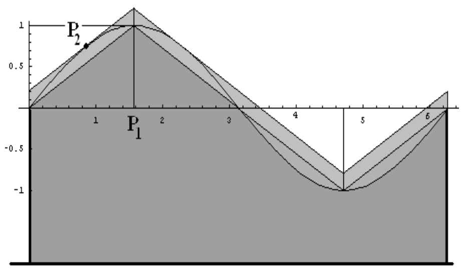
(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist (grösstmöglicher Stirnflächeninhalt) $\rightsquigarrow\ \ x_1 = ?$ (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite h ist als Parameter einzusetzen.)

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Nebenstehende Skizze zeigt ein Haus von der Seite. Das aus drei Pultdächern zusammengesetzte Dach ist um eine Sinuslinie in einem Koordinatensystem wie folgt konstuiert: Die Sehne durch die Punkte $(0;0)$ und $(\frac{\pi}{2};1)$ wird parallel nach oben verschoben, sodass eine Tangente an die Sinuslinie im Punkte P_2 des Giebelgesims entsteht (vgl. nebenstehende Skizze). P_1 hat die Koordinaten $(\frac{\pi}{2};0)$.



(a) Berechne die Stirnfläche des Giebelgesims im gegebenen Koordinatensystem.

(b) Jedes der drei Stücke des Gesims soll je aus einem Kupferblech gefertigt werden. Die drei Stücke werden bei der Montage mit Kunststoff verbunden. Berechne die totale Länge und die Breite des zu bestellenden rechteckigen Blechbandes, wenn das Band der Länge nach in drei Stücke geteilt wird. Dabei wird kein Verschnitt berechnet, ausser an den Enden. (Mache dazu eine Skizze.)

— ENDE —