Modulprüfung in Algebra und Computermathematik, 2004

Klasse I1a

Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2004/19 (7f-8f) - 23/Biel/ N321
Do 23. 9.04/13:00-15:00 I1c/ 15:00-17:00 I1a

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik Biel,

23. September 2004

Modulprüfung in Mathematik 2004 — Klasse I1a

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=1} = \textit{Steigung der Kurve} \Rightarrow \textit{Steigungswinkel}\ \alpha = ?$

iv. $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x \approx ?$

v. $f''(x) = ?$

(b) $f(x) = (e^x + \cos(x))^x + \dfrac{((\sin(\frac{x}{3} - 3))^2)}{(ln(x) - x^2)}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ in einem Koordinatensystem mit folgenden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \\ (0;0) & (1;1) & (2;0) & (3;1) & (4;-1) & (6;0) & (7;3) \end{pmatrix}$$

P_1, P_2, P_3 sind durch eine Polynomkurve 3. Grades $f_1(x)$ verbunden. Ebenso P_3, P_4, P_5 durch $f_2(x)$ und P_5, P_6, P_7 durch $f_3(x)$. In den Punkten P_3 und P_5 stimmen die Tangenten der benachbarten Kurven überein. In P_1 ist die Tangentensteigung der Kurve gleich 0.

(a) Berechne die drei Polynomkurven $f_1(x), f_2(x)$ und $f_3(x)$.
$(f_1(x) = a_1\,x^3 + b_1\,x^2 + c_1\,x + d_1 = ?$ u.s.w..)

(b) Berechne die Steigungen in P_3, P_5 und P_7.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktionskurve C von $f(x) = e^x$. Durch die Punkte $Q_1(-1; f(-1))$ und $Q_2(1; f(1))$ wird die Sehne s gezogen. Diese Sehne wird soweit parallel nach unten veschoben, bis sie zur Tangente t wird. (Mache eine Skizze.)

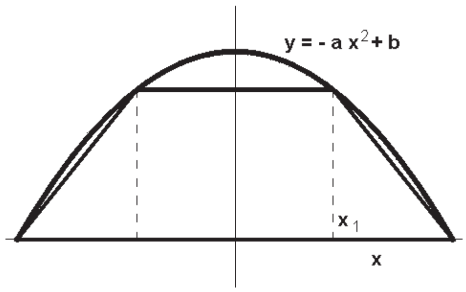
(a) Berechne den Berührungspunkt $T(x_0; t(x_0))$ von t an C $(t(x_0) = f(x_0))$.

(b) Berechne den Schnittpunkt A von t mit der x–Achse.

(c) Sei n die Normale zu t in T. Berechne den Schnittpunkt B von n mit der x–Achse.

(d) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle ABT$.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**



In Ixtown steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle für die Computergrufti–Messe gebaut werden. Die Wänden und Decke der Halle sind ebene Flächen. Stirnseitig ist die Halle vertikal bündig zur Brücke und verglast. (Vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für a und b sind aus der Bogenhöhe 20 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 40 $Meter$ zu bestimmen.

(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist ($\rightsquigarrow$ grösstmöglicher Stirnflächeninhalt, $\rightsquigarrow$ $x_1 = ?$ Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne näherungsweise das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite s ist gleich 20 $Meter$.)

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Zusatz:

(a) $a_1 = 1,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 12,\ \ a_n = \alpha\, n^3 + \beta\, n^2 + \gamma\, n + \delta$

i. $a_5 = ?$

ii. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = ?$

iii. $s_{100} \approx ?$

iv. $\dfrac{s_{1000}}{s_{999}} \approx ?$

(b) $b_1 = 1,\ \ a_n = (n+1)(b_{n-1} - 1) \rightsquigarrow\ \ b_{50} \approx ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^2 - e}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} \cdot \dfrac{\cos(n^2) + n^2 - 2\,n + 2}{3\,n^3 + 4\,n^2 + 2\,n - 1} \cdot (n+1) = ?$

— ENDE —