Modulprüfung in Algebra und Computermathematik, 2005

Klasse I1c

Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2005//21/18+3 - 23/Biel/ N421
Mo 26. 9.05/ 10:00-12:00 I1c

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik Biel,

26. September 2005

Modulprüfung in Mathematik 2005 — Klasse I1c

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{x^2 - 2x + 1}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = \,?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$

iv. Etwaige reelle Lösungen: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = \,?$

ii. $f''(x) = \,?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \,?$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Kurve von $f(t) = 2\,e^{-t^2} - 1$ und im 1. Quadranten auf dieser Kurve ein Punkt $P = (x; y)$, d.h. $t = x$, $f(t) = y$. Wie gross muss x sein, damit das durch $(x; y)$, $(0; 0)$, $(-x; f(-x))$ gegebene Dreieck maximalen Inhalt $A(x)$ hat?

(a) Skizziere $A(x)$.

(b) Berechne $A'(x)$ und verwende den Newton-Algorithmus um den Punkt $P = (x; y)$ im 1. Quadranten zu finden, für den $A(x)$ maximal wird (Frage mit der nächsten Frage verbunden!).

(c) Man starte den Newton-Algorithmus mit $x_1 = 0,5$. Nach wievielen Schritten ändert sich der Wert an der 3. Stelle hinter dem Dezimalpunkt nicht mehr?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionskurven von $f_1(x) = a\,(x-3)(x-2)(x+4)$ sowie $f_2(x) = b+x^2$. An der Stelle $x = 2$ sollen die beiden Kurven einen gemeinsamen Punkt S_1 sowie auch eine gemeinsame Tangente haben. (Mache eine Skizze.)

(a) Berechne a und b.

(b) Berechne einen zweiten Schnittpunkt S_2 der beiden Kurven ($|x_2| \to min.$).

(c) Durch den Wendepunkt W von f_1 sowie durch S_1 und S_2 wird eine Polynomkurve $f_3(x)$ gelegt, sodass die Tangenten von f_2 und f_3 in S_2 übereinstimmen. Berechne die Steigung von f_3 in S_2. ($pgrad \to min.$)

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben sind 5 Punkte in einem Koordinatensystem:

$$P_1 = (3;6), P_2 = (-3;6), P_3 = (-3;-5), P_4 = (0;-6), P_5 = (3;-4)$$

Durch die Punkte soll ein nicht degenerierter Kegelschnitt gelegt werden (Ellipse, Parabel oder Hyperbel). Für die Kegelschnittgleichung soll folgender Ansatz gemacht werden:

$$f(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \;\; f = 1$$

(a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e und setze diese in $f(x,y)$ ein.

(b) Berechne aus $f(x,y) = 0$ die Funktionen $y_k(x)$ (vermutlich zwei Möglichkeiten $k = 1$ und $k = 2$).

(c) Skizziere die Kurven $y_k(x)$.

(d) Berechne im Falle einer Ellipse $u = x_{max}$, im Falle der Hyperbel $u = x_{min}$ des höher liegenden Hyperbelasts.

(e) Entscheide exakt, ob $u > -0.5$ richtig ist!

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Zusatz:

(a) $a_n = n^4, \; n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \; b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{10'000} = ?$

(b) In Nasewo–Schilda steht ein 95 Meter hoher Turm mit einem quadratischen Grundriss von 6 mal 6 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 3 Meter hoch ist. Vor dem Turm ist der Marktplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 200 Meter weit in alle Richtungen. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt aufgestellt werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Wie hoch kann dieser Spiegel maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und rechteckig sein soll?

— ENDE —