Examen de module en analyse et mathematiques par ordinateur, 2005

Classe I1c

Mathematiques

Durée: 120 minutes

WIR1-2005//21/18+3 - 23/Bienne/ N421
Lu 26. 9.04/ 10:00-12:00 I1c/

Conditions:

- Tous les problèmes sont à résoudre soi-même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence l'exclusion immédiate de l'examen.
- Pour écrire il faut un moyen ineffaçable. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.
- On demande une représentation de la déduction de la solution claire et propre avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la déduction ne sont pas acceptés.
- Quand des fractions décimales sont utilisées le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas différer de plus de 0.1%.
- Les unités physiques peuvent être omises généralement, sauf avis contraire.
- Les résultats sont à souligner doublement.
- Les parties non valables sont à tracer de manière propre et nette.
- Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les versos des feuilles doivent rester vides. Peut-être elles ne seront pas corrigées!
- **Moyens permis:** Dossiers de cours version abrégéé (résumé), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.
- **Points:** Par devoir, 12 points sont possibles, sauf avis contraire.
- But: Si pour l'examen plus de 4 problèmes sont donnés, il faut en choisir 4 et les résoudre.

Haute école spécialisée bernoise, haute école technique et informatique Bienne

26. séptembre 2005

Examen de module en analyse et mathematiques par ordinateur 2005 Classe I1c

Bonne chance !

Problème 1 **(12 points)**

Démontrer le calcul des solutions à la main. Expliquer les étapes:

(a) $f(x) = -2\,\dfrac{6\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x^1 + x^0}{x^2 - 2x + 1}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=0} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=0} =$ Pente de la courbe $\Rightarrow$ angle d'inclinaison $\alpha = ?$

iv. Solution réelle possible $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$

(b) $f(x) = (\sin(x)\,e^x - \cos(e^{-x})) - \dfrac{x^3}{x+1}$

i. $f'(x)|_{x=1.0} = ?$

ii. $f''(x) = ?$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = ?$

Problème 2 **(12 points)**

Soit donnée la courbe de $f(t) = 2\,e^{-t^2} - 1$ et dans le premier quadrant un point $P = (x; y)$ sur cette courbe, ç.v.d. $t = x,\;\; f(t) = y$. Quelle est la mesure de x afin que le triangle donné par $(x; y),\;\; (0; 0),\;\; (-x; f(-x))$ ait une surface maximale $A(x)$?

(a) Faire une esquisse de $A(x)$.

(b) Calculer $A'(x)$ et utiliser l'algorithme de Newton pour trouver le point $P = (x; y)$ dans le premier quadrant, pour lequel $A(x)$ devient maximal (la question est liée à la question suivante!).

(c) On commence l'algorithme de Newton avec $x_1 = 0,5$. Après combien d'étapes la valeur à la troisième place après le point décimal ne chanche plus?

Problème 3 **(12 points)**

Soient données les courbes de fonction de $f_1(x) = a\,(x-3)(x-2)(x+4)$ ainsi que $f_2(x) = b + x^2$. A la place $x = 2$ les deux courbes doivent avoir un point commun S_1 ainsi qu'une tangente commune. (Faire une esquisse.)

(a) Calculer a et b.

(b) Calculer un deuxième point d'intersection S_2 des deux courbes ($|x_2| \to min.$).

(c) On place une courbe polynomiale $f_3(x)$ par le point d'inflexion W de f_1 et par S_1 et S_2 de façon que les tangentes de f_2 et f_3 soient les mêmes en S_2. Calculer la pente de f_3 à S_2. ($pgrad \to min.$)

Problème 4 **(12 points)**

Soient donnés 5 points dans un système de coordonnées

$$P_1 = (3; 6), P_2 = (-3; 6), P_3 = (-3; -5), P_4 = (0; -6), P_5 = (3; -4)$$

Par les points on dessine une section conique non dégénérée (ellipse, parabole, hyperbole). Pour l'équation de la section conique on essaye l'approche suivante:

$$f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \;\; f = 1$$

(a) Calculer les paramètres a, b, c, d, e et les insérer dans $f(x, y)$.

(b) Calculer de $f(x, y) = 0$ les fonctions $y_k(x)$ (probablement deux possibilités $k = 1$ et $k = 2$).

(c) Esquisse des courbes $y_k(x)$.

(d) Calculer dans le cas de l'ellipse $u = x_{max}$, dans le cas de l'hyperbole $u = x_{min}$ du bras de l'hyperbole qui es situé le plus haut.

(e) Décider de façon exacte si $u > -0.5$ est juste!

Problème 5 **(12 points)**

Adjonction:

(a) $a_n = n^4, \;\; n \in \mathbb{N}$

i. $\Rightarrow \;\; b_n = a_{n+1} - a_n = ?$

ii. $c_n = b_{n+1} - b_n = ?$

iii. $c_{10'000} = ?$

(b) A Nasewo–Schilda il y a une tour d'une hauteur de 95 mètres, avec un plan carré de 6 sur 6 mètres. D'un côté, on trouve l' entrée qui est aussi large que la tour, mais seulement d'une hauteur de 3 mètres. Devant la tour s'étend la place du marché. Celle-ci a un niveau exactement horizontal et est vaste de presque 200 mètres dans toutes les directions. Dans la tour, au mur du fond, il faut maintenant installer le miroir plat le plus grand du monde entier, aussi large que le mur, bien compris. Combien haut est-ce que ce miroir peut être au maximum s'il doit être porté par l'entrée et s'il est de forme rectangulaire?

— FIN —