Modulprüfung
2006
Klasse M+E 05 / M+E 1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 22 /Burgdorf/M 15
Mo 13.3.06/16.00-18.00

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

13. März 2006

Modulprüfung in Mathematik 2006 M+E 05 / M+E 1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben: (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Sei $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

(a) Berechne $P^2 := P \cdot P,\ \ P^3 := P \cdot P^2,\ \ P^4 := P \cdot P^3$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für P^n.

(b) Berechne $Q := P^{-1},\ \ \beta \neq 0$. Setze zur Vereinfachung $q := \dfrac{1}{\beta}$. Berechne damit wie oben $Q^2 := Q \cdot Q,\ \ Q^3 := Q \cdot Q^2,\ \ \ldots$. Schliesse daraus allgemein auf eine Formel für Q^n.

(c) Bestimme eine obere Dreiecksmatrix $R = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ (wenn möglich mit positiv besetzten Zellen), für die $R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 2 **(15 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Gleichung $A \cdot \vec{a} = \vec{b}$ oder $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ \gamma \end{pmatrix}$

i. Berechne α für den Fall, dass $\gamma = 5$ gilt.

ii. Wähle nun umgekehrt $\alpha = 5$ und berechne für diesen Fall jetzt γ

iii. Untersuche, für welche α die Matrix A keine Inverse hat.

(b) i. Gegeben ist die Gleichung

$$B \cdot \vec{k}(t) = \vec{m}(t) \text{ oder } \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist definiert $\vec{k}(t) = \begin{pmatrix} -4\,t \\ t \\ 7\,t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine Gerade. Berechne das Bild dieser Gerade, d.h. berechne den Vektor $\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Was ist am Resultat auffallend?

ii. Benütze den Gauss-Algorithmus, um B in eine Dreiecksmatrix zu verwandeln, in der unterhalb der Hauptdiagonalen nur noch die Zahl 0 vorkommt. Wieviele linear unabhängige Zeilen kommen in dieser Dreiecksmatrix vor? Und was bedeutet das für die Dimension der Lösungsmenge von $B \cdot \vec{x} = \vec{b}$?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Gleichung in $\mathbb{C}$: $z^6 = i$.

(a) Stelle alle Lösungen mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion dar.
(Hinweis: Form $z = e^{i\,\varphi\cdots}$.)

(b) Stelle die Lösungen mit Hilfe einer Skizze dar und entscheide, wieviele Lösungen im 1. Quadranten liegen.

(c) Berechne die Summe aller möglichen verschiedenen Lösungen: $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \,?$

(d) Sei z_1 diejenige Lösung $e^{i\,\varphi\cdots}$ mit dem kleinsten positiven φ im Exponenten. Berechne z_1^5, $\frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_1$ sowie $z_1 + \frac{1}{z_1}$ numerisch. Was fällt auf?

Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

Die folgenden Probleme sind voneinander unabhängig:

(a) i. Sei $z = a + i,\ a \in \mathbb{R}$. Gegeben ist die Gleichung: $z + \frac{1}{z} = 0$. Untersuche, für welche $a \in \mathbb{R}$ diese Gleichung eine Lösung hat. Berechne allenfalls a und z exakt.

ii. Ersetze nun die Gleichung $z + \frac{1}{z} = 0$ durch $z + \frac{r}{z} = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Untersuche, für welche $r \in \mathbb{R}$ diese Gleichung allenfalls jetzt auch eine reelle Lösung $z \in \mathbb{R}$ hat.

(b) Gegeben sind im Raum 4 Punkte $P_1(4, 1, -1)$, $P_2(3, -4, 8)$ und $Q_1(5, 15, 2)$, $Q_2(8, -11, z)$. Diese Punkte sollen durch Stangen verbunden werden, die jeweils über die Punkte hinaus weiterlaufen. Die Stangen können für die Rechnung als unendlich dünn, d.h. als Geraden angenommen.

i. Bestimme z so, dass sich die Stangen (Geraden) berühren.
Hinweis: Das Spatprodukt könnte hier nützlich sein — und wie immer bei geometrischen Problemen könnte auch eine Skizze Nutzen bringen.

ii. Berechne den Berührungspunkt S.

iii. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle P_1 Q_1 S$.

— ENDE —