Modulprüfung
2006
Klasse B 05 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 25 /Burgdorf/B 152
Fr 24.2.06/10.25-12.05

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,
24. Februar 2006

Modulprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 05 / B1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(18 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = x^2 + 0.5\,\sin(x)$
   i. $f'(x) = \,?$
   ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$
   iii. $f'(x)|_{x=1} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$
   iv. $f''(x)|_{x=1} = \,?$

(b) $f(x) = \left(\sqrt[4]{\left(x^{3/4} - 3\right)^3}\right)^5 \rightsquigarrow\; f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = -4\,x^2 \sin\left(2 - 3\,x^2\right) \rightsquigarrow\; f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \dfrac{x\,ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x} \rightsquigarrow\; f'(x) = \,?$

(e) $f(x) = 4\,e^{-x}\cos\left(2 - e^x\right) \rightsquigarrow\; f'(x) = \,?$

(f) $f(x) = x^2 + a\,\sin(x) + \dfrac{2}{x} \rightsquigarrow\; \int\limits_1^{e^2} f(x)\,dx = \,?$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Gegeben sind zwei Kurve durch $f_1(x) = x^5$ und $f_2(x) = x^{1/5}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$. f_1 und f_2 schliessen über I eine Fläche A_0 ein. Die damit gegebene Figur sei ebenfalls mit A_0 bezeichnet.

(a) Skizziere die Figur A_0.

(b) Zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 wird nun eine dritte Kurve $f_3(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme a so, dass f_3 die Figur A_0 in zwei inhaltsgleiche Teilfiguren A_1 (oben) und A_2 (unten) zerlegt. (Zeichne darauf f_3 in der Skizze ein.)

(c) Wie in der letzten Teilaufgabe wird nun zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 eine weitere Kurve $f_4(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme diesmal a so, dass f_4 die Figur A_0 in zwei Teilfiguren A_3 (oben) und A_4 (unten) zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ verhalten (goldener Schnitt).
(Zeichne darauf f_4 ebenfalls in die Skizze ein.)

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}\left(x^2 - 1\right)$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Bestimme die Parameter a, b, c von p so, dass $p(x)$ dieselben Nullestellen hat wie $f(x)$. Zudem soll $p(x)$ für $x = -1$ die gleiche Tangentensteigung haben wie $f(x)$. (Skizziere jetzt die beiden Kurven!)

(b) Bestimme das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_f und A_p zwischen der x–Achse und den Kurven $f(x)$ bzw. $p(x)$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(c) Anhand der Skizze könnte man glauben, dass die Kurve $f(x)$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat. Untersuche, ob diese Vermutung stimmt. (Das Resultat ist zu belegen.)

(d) Die Parabel $p(x)$ wird um die x–Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(e) Berechne numerisch anngenähert die Bogenlängen von f und p bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$. Was ist das Verhältnis der grösseren zur kleineren Länge?

Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ soll als Näherungsmodell der geometrischen Form eines Hügels dienen. Die Hügelkurve soll nun so in ein Koordinatensystem eingepasst werden, dass bei $x = -2$ und bei $x = 2$ je eine Nullstelle liegt und die Kurve dazu bei $x = 0$ ein Maximum besitzt. Bei $x = -1$ gibt es ferner eine Tangente mit der Steigung 1. Bei $x = 1$ hat die Tangente die Steigung -1. Zudem ist $f(0) = 2$.

(a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e.
Hinweis: Man kann die Rechnung enorm vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die gegebenen Werte auf eine gerade Funktion führen müssen und daher gewisse Parameter 0 sein müssen!
Skizziere die Kurve!

(b) Berechne jetzt die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$.

(c) Stelle die Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ dar.
Hinweis: Wenn man die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ betrachtet, so kann man darin als wesentlicher Teil eine geometrische Reihe entdecken.

(d) Berechne mit Hilfe des Hinweises in der letzten Teilaufgabe den Konvergenzradius der gewonnenen Potenzreihe.

(e) Verwende als Näherung nur das Taylorpolynom vom Grade 4. Was sind dann die gemachten Fehler an der Stelle $x = 0.5$ und $x = 0.9$?

Aufgabe 5 **(8 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 0$. Verwende nur die Glieder bis $n = 10$. Ausgehend von der Tatsache, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist, kann man mit dem gewonnenen Taylorpolynom die Zahl π annähern. Berechne diese Näherung und entscheide, wieviele Stellen mit den Taschenrechner so exakt berechnet werden können.

(b) Auf dem Lumpenberg bei Riesenschluren am Äquator steht ein 100 Meter hoher und oben offener Turm, gleich einem Kamin, mit einem inneren quadratischen Grundriss von 10 mal 10 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 2 Meter hoch ist. Der Eingang ist so tief gehalte, damit sich die Riesen beim Eintritt vor der Kunst im Turm verneigen müssen. Vor dem Turm ist der Parkplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Links und rechts des Turms steht je im Abstand von 5 m vom Turm eine 20 m hohe Tanne. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt angebracht werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Damit soll nach der Meinung der dort lebenden Riesen die Sonne in den Turm gelockt werden. Der Spielgel soll sie spiegeln und dann unten wieder herauszulocken. Im Innern des Turms ragen in der Mitte der linken und rechten Seitenwand 1 Meter über dem Boden je ein Bolzen von 3 cm Durchmesser 50 cm in den Raum hinein. Wie breit und hoch kann dieser Spiegel aus einem Stück maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und maximalen Flächeninhalt haben soll? (Mache dir erst eine Skizze! Die Spiegeldicke soll man vernachlässigen.) Und wie weit wird es maximal gelingen, die Sonne herauszuspiegeln (Wanddicke des Turms 70 cm.)

— ENDE —