Modulprüfung 2
2006
Klasse B 05 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 21 /Burgdorf/ B152
Di 27.6.06/ 09:15–11:15

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,
27. Juni 2006

Modulprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 05 / B1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie die Gleichung $A \cdot X \cdot B = M$.

(a) i. Berechne die Determinanten von A, B, M.
   ii. Was kann man im Falle, wo die Determinante von A ungleich 0 ist, über die Determinante von X sagen?
   iii. Wann ist die Determinante von A gleich 0?

(b) Berechne X allgemein in den Fällen, wo die Determinante von A ungleich 0 ist. Stelle dann das Resultat explizit dar für $a = 3$

(c) Was gilt für die Lösung X im Falle, wo die Determinante von A gleich 0 ist? (*Hinweis:* Vergleiche $A \cdot X$ und $M \cdot B^{-1}$ elementweise.)

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Ein horizontal in eine Wand eingemauerter Träger mit quadratischem Querschnitt $d \cdot d$ und der Länge L ist mit einer konstanten Streckenlast sowie dazu mit einer Gegenkraft am freien Ende belastet. Weiter kennt man die Formel $y''(x) = -\dfrac{m(x)}{E \cdot I}$, wobei I das axiale Trägheitsmoment und E das Elastizitätsmodul ist.

(a) Berechne aus dem angegebenen Zusammenhang eine nicht numerische Formel für die Biegelinie, wenn man ein Koordinatensystem mit den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ und positivem x sowie y nach unten annimmt mit dem Ursprung an der Mauer.
Hinweis: Für das von der Streckenlast herrührende Moment ist $-q_1\,(L-x)^2$, $q_1 = \dfrac{q}{2}$, zu setzen und für das von der Gegenkraft herrührende Moment $+F_1\,(L-x)$.

(b) Es soll jetzt gelten: $d = 6\ cm$, $L = 4\ m$, $E = 210000 N/mm^2$. Die Streckenlast rührt von einer totalen Masse von 800 kg her. Die Gegenkraft beträgt 500 N. Berechne mit diesen Angaben die maximale Auslenkung und skizziere die Biegelinie.

(c) Berechne nun die Tangentensteigung am Ende des gebogenen Balkens in Altgrad.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

(a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Faktoren $k_1 = 1,\ \ k_2 = 4,\ \ k_3 = -2$

i. Berechne die Matrix M, welche $\vec{v_1}$ in $k_1 \cdot \vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ in $k_2 \cdot \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ in $k_3 \cdot \vec{v_3}$ abbildet.

ii. Was sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M?

(b) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -8 & \frac{9}{2} \\ -24 & 13 \end{pmatrix}$

sowie die Gerade $g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren. Entscheide, ob die Abbildung eine Fixgerade hat, auf der die Punkt alle in sich selbst übergehen.

ii. Untersuche, ob es einen Wert t_0 gibt, für den $\vec{v}(t_0) = M \cdot \vec{v}(t_0)$ gilt. Berechne allenfalls $\vec{v}(t_0)$.

iii. Berechne die Bilder $M \cdot \vec{v}(0)$ zu $\vec{v}(0)$ und $M \cdot \vec{v}(1)$ zu $\vec{v}(1)$. Damit ist die Bildgerade g_M resp. $M \cdot \vec{v}(t)$ bestimmt. Untersuche nun, ob die Vektoren $M \cdot \vec{v}(0) - \vec{v}(0)$ sowie $M \cdot \vec{v}(1) - \vec{v}(1)$ oder allgemein $M \cdot \vec{v}(t) - \vec{v}(t)$ etwas mit den Eigenvektoren zu tun haben.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade

$g:\ \vec{v}_g(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \rightsquigarrow$ Projektionsrichtung, $\{\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b}\} \rightsquigarrow$ Ebene.

(a) Projiziere die Gerade g auf die durch den Ursprung und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierte Ebene Φ, indem du die Punkte resp. Vektoren $\overrightarrow{OP_1} = \vec{v}_g(0)$ und $\overrightarrow{OP_2} = \vec{v}_g(1)$ auf Φ projizierst $\rightsquigarrow$ Gerade $g\,'$, Punkte $P_1\,'$, $P_2\,'$. (Nur die beiden Punkte sind zu berechnen.)

(b) Drehe anschliessend die Gerade g mit Hilfe der gewonnenen Punkte um $+30^o$ um die z–Achse $\rightsquigarrow$ (Gerade $g\,''$, Punkte $P_1\,''$, $P_2\,''$). (Nur die beiden Punkte sind zu drehen.)

(c) Berechne und vergleiche die Abstände von $g, g\,'$ und $g\,''$ vom Ursprung.

(d) $P_1\,', P_2\,', P_1\,'', P_2\,''$ spannen ein Tetraeder auf. Berechne das Volumen.

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

Sei $M = \begin{pmatrix} -16 & 17 & -16 \\ -48 & 58 & -64 \\ -24 & 31 & -36 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne das Polynom $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$.

(b) Ersetzt anschliessend alle Koeffizienten a_k durch $(a_k \cdot E)$ sowie λ durch M. Dabei ist λ^3 durch $M \cdot M \cdot M := M^3$ und λ^2 durch $= M \cdot M \ = M^2$ zu ersetzen. Berechne den entstehenden Ausdruck. (*Hinweis:* Es muss eine spezielle Matrix herauskommen.)

— ENDE —