Vordiplomprüfung 2. Jahr
2006

Klasse B 04 / B2

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2006/ 22 /Burgdorf/ V223
Fr 15.9.06/ 08:30–11:30

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,
15. September 2006

Vordiplomprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 04 / B2

Viel Glück !

Löse die folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1 **(15 Punkte)**

Gegeben ist $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2})}$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Diese Funktion f kann man auch als Funktion $h(r,\varphi)$ auffassen. Es gilt dann $h(r,\varphi) = \sqrt{r^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{r^2}}{2})}$, $\sqrt{r^2} = |r|$. Daher können wir die Funktionsfläche (Graph) in $\mathbb{R}^2$ auch als Rotationsfläche verstehen.

(a) Skizziere den Graphen für $x, y \in [-2,2]$ oder $r \in [0,2]$. (Wenn r statt x, y benutzt wird, zeigt der Graph eine Rotationsfläche. Dann werden die Ecken abgeschnitten, was hier nichts ausmacht.)

(b) Untersuche die Frage, was bei $x = y = r = 0$ für eine Situation passiert: Hat man eine Spitze oder hat man eine gewöhnliche Tangente in Richtung x sowie y (oder alternativ in Richtung r)? (Bestimme zur Beantwortung der Frage die Ableitungen und davon den Grenzwert für x, y resp. $r \to 0$.)

(c) Bestimme die maximale Höhe der Fläche für $r \in [0,2]$.

(d) Bestimme den Gradienten der Funktion für $x = y = 1$.

(e) Bestimme approximativ den Flächeninhalt über der Region $[1 \le x \le 2] \times [1 \le y \le 2]$.

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

(a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w = 3 - i$. Berechne diejenige Lösung z_k von $(z-w)^5 = 6 - 9\,i$, welche vom Ursprung den kürzesten Abstand hat.

(b) Sei $w_0 = w$, $w_1 = \frac{1}{|w|}w$, $w_2 = \frac{1}{|w|}\bar{w}$, $w_3 = \frac{1}{w}$. Berechne w_1, w_2, w_3 und untersuche die gegenseitige Lage und Grösse der beiden Strecken $\overline{w_0 w_2}$ und $\overline{w_1 w_3}$.
Hinweis: Berechne jeweils die Differenz der involvierten komplexen Zahlen. Normiere diese Differenz.

(c) Erstelle eine genaue Skizze der komplexen Ebene mit den Zahlen w_0, w_1, w_2, w_3. Zeichne als Referenzfigur den Einheitskreis in die Skizze ein. Was stellt man fest?

(d) Welches geometrische Gesetz im Zusammenhang mit dem Übergang von w zu $\frac{1}{w}$ kann hier vermutet werden?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

(a) Berechne von Hand die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) + y''(x) = \cos(x)$$

und erläutere dabei die Lösungsmethode.

(b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x).$$

(c) Berechne die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$.

(d) Skizziere die eben gefundene spezielle Lösung für $x \in [0, 12]$.

(e) Berechne approximativ den Funktionswert der gefundenen speziellen Lösung bei $x \approx 2.75558$.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

(a) Bestimme die Potenzreihenentwicklungen $p_s(x)$ von $\sin(x)$ und $p_c(x)$ von $\cos(x)$ bis und mit zu den Gliedern der Ordnung 10 (Polynome vom Grad ≤ 10). *Das Zentrum der Entwicklung für alle Teilaufgaben ist $x_0 = 0$.*

(b) Bestimme graphisch approximativ das Intervall auf der x–Achse mit Zentrum 0, in dem $|p_s(x) - \sin(x)| \leq 0.01$ gilt.

(c) Differenziere $p_s(x)$ nach x. Wie weicht das Resultat von $p_c(x)$ ab und wieso?

(d) Bestimme mit Hilfe von $p_s(x)$ und $p_c(x)$ die Potenzreihenentwicklung $p_{s+c}(x)$ von $\sin(x) + \cos(x)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Bestimme ebenfalls die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Vergleiche das Resultat mit $p_{s+c}(x)$. Was kann man daraus ersehen?

(e) In der Nähe von $x = 0$ ist $\frac{p_s(x)}{x}$ eine Näherungsformel für $\frac{\sin(x)}{x}$. Skizziere die beiden Funktionen in einem Diagramm mit dem Ausschnitt $x \in [-1, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Kann man die beiden Kurven im Diagramm unterscheiden?

(f) Ermittle aus den Resultaten eine Näherungsformel für eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$, welche für $x \in [-1, 1]$ anwendbar sein soll.

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Eine Matrix M bildet den Vektor $\vec{e}_1$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab, den Vektor $\vec{e}_2$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\quad (\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ etc..)

(a) Berechne M.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sowie die normierten Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ der Matrix M.

(c) Berechne das Produkt der Eigenwerte und vergleiche dieses Produkt mit der Determinante von M. Was könnte man vermuten?

(d) Berechne das charakteristische Polynom von M und vergleiche die Koeffizienten mit dem Produkt der Eigenwerte sowie der Summe der Eigenwerte.

(e) Berechne das Bild des Vektors $\frac{1}{\lambda_1}\,\vec{x}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\,\vec{x}_2 + \frac{1}{\lambda_3}\,\vec{x}_3$ bei der Abbildung mit M. Was fällt auf am Resultat?

Aufgabe 6 **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(0,0,4),\ P_2(0,6,0),\ P_3(3,0,0)$. Der Punkt $Q_1(2,8,0)$ wird an Φ gespiegelt. Der gespiegelte Punkt ist Q_2. Berechne

(a) den Spiegelpunkt Q_2 sowie den Mittelpunkt der Kugel, welche Q_1 als Nordpol und Q_2 als Südpol hat,

(b) das Volumen des Körpers $P_1P_2P_3Q_2$,

(c) den Flächeninhalt $P_1P_2P_3$,

(d) den Winkel $\angle(Q_1P_1Q_2)$,

(e) den Abstand der Kugelachse Q_1Q_2 vom Ursprung.

Aufgabe 7 Die folgenden beiden elementaren Aufgaben sind unabhängig. **(Je 6 Punkte)**

(a) Ein Brückenbogen hat die schöne Form einer Sinuslinie $f(x) = sin(x),\ \ x \in [0, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des grössten Trapezes, das man zwischen diese Sinuslinie und die x–Achse einpassen kann und ebenso den Inhalt der Fläche zwischen Trapez und Sinuslinie.

(b) Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m. Darin werden die Schläuche zum Trocknen aufgehängt. Der Grundriss ist $4 \times 4\ m^2$. Die Eingangstür vorne hat eine Höhe von 2.50 m. Nun will man eine Leiter maximaler Länge bestellen, welche von vorne gerade noch zur Tür hinein geschoben und hochgestellt werden kann. Wie lang darf diese Leiter höchstens sein? (Der Weg von vorne verläuft rechtwinklig zur Wand mit der Tür und ist gerade genügend breit, sodass die Leiter bequem transportiert werden kann.)

— ENDE —