Modulprüfung
2007
Klasse M+E 06 / M+E 1
Mathematik, Analysis 2. Sem.

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2007/ 20 /Burgdorf/ E23
Mo 27.8.07/15.00-18.00

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Elektrotechnik und Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf,

27. August 2007

Modulprüfung in Analysis 2007 — M+E 06 / M+E 1

Viel Glück !

Löse 7 der folgenden Aufgaben: (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$C_1 : \ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad r = 1, \quad t \in I = [0, 4\,\pi].$$

Diese Schraubenlinie windet sich um einen senkrecht stehenden Zylinder mit Radius 1. Weiter ist eine zweite Kurve mit einer anderen, nicht mehr konstanten Steigung gegeben:

$$C_2 : \ \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} r\,\cos(t) \\ r\,\sin(t) \\ t + (\frac{t}{10})^2 \end{pmatrix}, \quad r = 1, \quad t \in I = [0, 4\,\pi].$$

(a) Zeige die beiden Schraubenlinien in einer einzigen Skizze.

(b) Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_1 = 0$. Berechne auch den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren. Was fällt auf?

(c) Berechne die Richtungsvektoren der beiden Kurven für $t_2 = 4\,\pi$ sowie den Winkel zwischen diesen beiden Richtungsvektoren.

(d) Berechne die beiden Kurvenlängen numerisch.

(e) Berechne das Kurvenintegral $\int\limits_{C_1} \langle \vec{v}\,'(t), \vec{w}\,'(t) \rangle \, ds, \ \ ds = |\frac{d\vec{v}}{dt}|\, dt = |\vec{v}\,'(t)|\, dt.$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y), \ \ (x,y) \in D_f = [-\pi, \pi]^2.$

(a) Berechne die Lage allfälliger Extrema in D_f.

(b) Überprüfe die Identität $f(x,y) = 2\,\sin(x + \frac{\pi}{4})\,\sin(y + \frac{\pi}{4})$

(c) Skizziere den Graphen und die Höhenlinienkarte.

(d) In der Grundebene ist die das Kurvengebilde $h(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y) = 0$ gegeben. Suche für $x, y \geq 0$ allfällige Extrema auf der Funktionsfläche f, für die $h(x,y) = 0$ gilt.

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Ein Bauteil eines Apparates wird begrenzt durch

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \;\; (x,y) \in [-5,5]^2, \;\; z \leq 50.$$

(a) Skizziere die Bauteilform. Benutze k_1, k_2, k_3, k_4 als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten. Trage diese an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen in der Skizze ein.

(b) Berechne den Volumeninhalt des Bauteils.

(c) Berechne die Längen der Bögen k_i, an denen Kabel angebracht werden sollen.

(d) Berechne approximativ den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche (Funktionsfläche von f).

(e) Berechne den Inhalt des krummen Teils der Oberfläche $f(x,y)$, welcher infolge eines nachträglich angebrachten Bohrlochs mit Radius 2 auftritt (Oberflächenverlust, Bohrlochachse gleich z–Achse).

Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \sin(x)$ mit Zentrum $x_0 = 2\,\pi$ bis und mit den Gliedern der Ordnung 10 (Approximation mit Polynomgrad 10).

(b) Suche damit die entsprechende Approximation $u(t)$ der Funktion $\sin(\frac{1}{t})$, indem du die Variable x durch $\frac{1}{t}$ ersetzest.

(c) Vergleiche die Plots von $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ für $t \in I = [0.1, 0.4]$.

(d) Durch einen genauen graphischen Vergleich kann man vermutlich ablesen, dass die grösste Abweichung zwischen $u(t)$ und $\sin(\frac{1}{t})$ in I bei $t_1 = 0.4$ liegen muss. Kontrolliere diese Vermutung und berechne die auf $\sin(\frac{1}{t})$ bezogene grösste prozentuale Abweichung.

(e) Ermittle mittels $\int\limits_{0.1}^{x} u(t)\,dt$ eine Näherungsformel für das Integral $\int\limits_{0.1}^{x} \sin(\frac{1}{t})\,dt$ für $t \in [0.1,\ 0.4]$ und extrahiere daraus diejenigen Terme, in denen die Koeffizienten einen Betrag grösser als 0.1 besitzen. (Nur diese werden bewertet.)

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 1. Ordnung)

$$12y'(x) - 16\frac{x}{y(x)} = 0, \;\; y(0) = 1.$$

(a) Skizziere das Richtungsfeld.

(b) Berechne die Lösung der Differentialgleichung bei der gegebenen Anfangsbedingung und zeichne die Lösung $y(x)$ ins Richtungsfeld ein.

(c) Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ und ergründe damit, um welche Art Wachstum es sich bei $y(x)$ annähernd handelt.

Aufgabe 6 **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$y'' + 2\,y' + y \;\;=\;\; e^{-t}$$

(a) Löse zuerst die homogene Differentialgleichung .

(b) Löse die inhomogene Differentialgleichung. Versuche dazu den Ansatz $y(t) = a \cdot t^2 \cdot e^{-t}$

(c) Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Tangente? Skizziere diese Kurve(n) über dem Definitionsbereich $D = [-2, 2]$.

(d) Bestimme für diese Kurve(n) die vorhandenen Extremwertstellen. Die vorhandenen Integrationskonstanten sind dabei Parameter. Wieviele Extremwertstellen hat eine Kurve maximal?

(e) Bestimme für diese Kurve(n) mit $y(-1) = \frac{e}{2}, \;\; y(0) = 1$ die Kurvenlängen zwischen $t = -1$ und $t = 1$. Eine numerische Näherung genügt.

Aufgabe 7 **(15 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung (Anfangswertsproblem 2. Ordnung)

$$y''(x) + 3\,y'(x) - 4\,y(x) = 1, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

(a) Berechne die Lösung der homogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.

(b) Skizziere die homogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, \; 4]$.

(c) Berechne die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bei den gegebenen Anfangsbedingungen.

(d) Skizziere die inhomogene Lösung über dem Intervall $I = [-1.5, \; 4]$.

(e) Vergleiche den Verlauf der homogenen und der inhomogenen Lösung: Skizzere die Differenzfunktion $d(x) = y_{inh}(x) - y_{hom}(x)$ über dem angegebenen Intervall. Was fällt auf beim Vergleich der Kurvenform von $d(x), \;\; y_{inh}(x)$ und $y_{hom}(x)$?

Aufgabe 8 **(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

(a) Integriere von Hand die Reihe $S(x)$ über dem Intervall $[0,\ t]$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k$$

Beurteile die Konvergenz der erhaltenen Reihe $S_1(t)$ durch Vergleich mit einer bekannten Majorante.

(b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$\cos(x) \equiv \int (1 - \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2)\, dx + C$$

Kann man daraus schliessen, dass $\cos(x)$ zwei verschiedene Ableitungen besitzt?

(c) Zeige oder widerlege von Hand:

$$e^x (x - n) = \int (-n + x + 1)\, e^x\, dx + C$$

(d)

$$w(x, n) := \frac{\partial \left(\mathit{ln}\,(x\sqrt{x}) - \mathit{ln}\left(x\sqrt{x-n}\right)\right)}{\partial x}$$

i. Berechne $w(x, n)$ von Hand, $x \in D_{w,n}$.

ii. Berechne anschliessend daraus den Grenzwert $\lim\limits_{x \to n} w^{-1}(x, n)$ sowie

iii. den Grenzwert $\lim\limits_{x \to n^2} w^{-1}(x, n)$.

(e) Sei $\mathit{sinE}(n) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\, \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))$ und $\mathit{cosE}(x) := (e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\, \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}))$.
Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\int\!\!\int \mathit{sinE}(x)\, dx\, dx = -\mathit{cosE}(x) + C_1\, x + C_2, \quad \int\!\!\int \mathit{cosE}(x)\, dx\, dx = \mathit{sinE}(x) + C_1\, x + C_2$$

— ENDE —