Modulprüfung
2008
Klasse Mp 06 / M2p
Mathematik 1, 2. Jahr, Analysis 3

Zeit: 120 Minuten (dazu getrennt 60 Minuten Statistik)

WIR1-2008/ 10 /Burgdorf/ M42
Fr 1.2.08/09:00-11:00 /11:15-12:15

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf

Freitag, 1. Februar 2008

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Analysis 3 Mp 06 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.)

Hinweis: Nach den bisherigen Erfahrungen war in 120 Minuten ein erreichbares Maximum von ca. 50 Punkten möglich. Wähle daher deine Aufgaben mit grossem Bedacht aus.

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Sei $$\vec{v}(r,u,t) = \begin{pmatrix} x(r,u,t) \\ y(r,u,t) \\ z(r,u,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\,\cos(u)+5)\,\sin(t) \\ (r\,\cos(u)+5)\,\cos(t) \\ r\,\sin(u) \end{pmatrix},$$

$u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1].$

(a) Skizziere den durch $\vec{v}$ und $u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r = 1$ parametrisierten Körper.

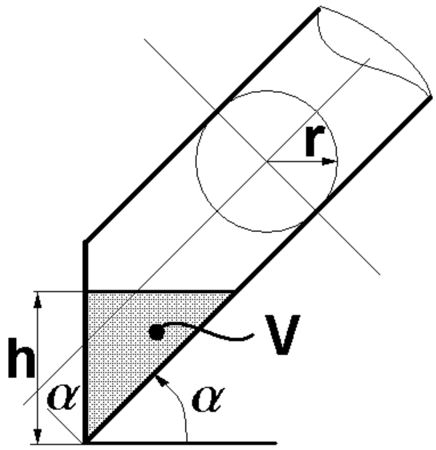
(b) Berechne die Jacobi–Determinante (Funktionaldeterminante)

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}\right).$$

(c) Bekanntlich gilt $dV = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,t)}\right)\right| dr\,du\,dt$. Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_r| = |V_1| = \int\limits_{V_1} dV,\ \ u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],\ \ r \in [0,\ 1]$.

(d) Berechne damit das Volumen des Körpers $|V_2| = \int\limits_{V_2} dV,\ \ u \in [0,\ 2\pi],\ \ t \in [0,\ \pi],$ $r \in [0,\ 2]$. Wie gross ist damit der Faktor k in der Gleichung $|V_2| = k \cdot |V_1|$?

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**



Ein rundes Rohr mit dem Radius r ist stirnseitig (links in nebenstehender Skizze) transparent durch ein Sichtglas verschlossen. Auf diesem Sichtglas soll eine Skala angebracht werden, auf welcher das jeweils im Rohr vorhandene Flüssigkeitsvolumen ablesbar ist.

(a) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ allgemein.

(b) Berechne das Volumen $V(h, \alpha, r)$ für $r = 5\,cm$ und $\alpha = 40^o$ sowie $h = 8\,cm$.

Aufgabe 3 **(24 Punkte)**

Berechne die Laplace–Transformierten resp. die Rücktransformierten der nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cosh(t) + \sinh(2\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(b) $f(t) = e^t - 2\,e^t \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(c) $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(d) $f(t) = \delta(t) + 1 + t + t^2 + t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = ?$

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(f) $Y(s) = \dfrac{10s}{4\,s^2-4} + \dfrac{5}{s^2+s+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(g) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{8\,s^3+8} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

(h) $Y(s) = \dfrac{3}{s^4+s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = ?$

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$4\,y''(t) - 2\,y'(t) + y(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichung.

(b) Berechne die Lösung $y_0(t)$ durch Rücktransformation. Bezeichne dabei z.B. den Einheitssprung an der Stelle 2 mit $u(t-2)$.

(c) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\ 3\,\pi]$.

(d) Skizziere die Lösung für $t \in [0,\ 12\,\pi]$.

Aufgabe 5 **(18 Punkte)**

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} {y_2}''(t) + a\,y_2(t) - b\,y_2(t) + b\,y_1(t) &= 0 \\ {y_1}''(t) + a\,y_1(t) - b\,y_1(t) + b\,y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System stellt bekanntlich ein Modell von zwei gekoppelten Pendeln dar.
Nimm als Anfangswerte: $y_1(0) = 1,\ \ {y_1}'(0) = 0,\ \ y_2(0) = 0,\ \ {y_2}'(0) = 0$

(a) Berechne die Laplace–Transformierte der Gleichungen.

(b) Löse das entstehende Gleichungssystem auf der Bildseite.

(c) Berechne die Rücktransformierten Funktionen.

(d) Skizziere die Funktionen für $a = 10$ und $b = 1$.

(e) Untersuche den Einfluss von a und b: Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 1$. Was stellt man fest?

(f) Skizziere die Funktionen für $a = 5$ und $b = 2$. Was stellt man fest?

Aufgabe 6 **(9 Punkte)**

(a) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{3}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{7}\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

i. Finde eine nicht konstante Lösung der Gleichung (mit Parameter).

ii. Finde eine Lösung mit der Anfangsbedingung $f(0,y) = e^{7\,y} + 1$.

(b) Gegeben ist die Kurve $y(x) = a\,\cosh(\frac{x}{a})$. Berechne die Krümmung für $x = 0$ und interpretiere den Parameter a.

— ENDE —