Modulprüfung
2008
Klasse B 07 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2008/ 30 /Burgdorf/ B19
08. 09. 2008/ Zeitfenster 09:00 – 11:15

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.01% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf,
08. 09. 2008

Modulprüfung in Mathematik 2008 — Klasse B 07 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von 4 Aufgaben aus der folgenden Serie.
Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

Aufgabe 1 **(24 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x+1)\,\ln(\frac{x+1}{2}) - 1.$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $x = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $f(x)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die x–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen exakt.

(b)

$$h(t) = \int\limits_{-5}^{t} (4\,x^3 - 2\,x^2 + t\,x - 5)\,dx$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $t = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $h(t)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die t–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen numerisch.

Aufgabe 2 **(15 Punkte)**

$$f(x,y) = e^k\,\cos(\frac{x}{\pi}) + \cos(\frac{y}{\pi}),\;\; G = [-1,\,1] \times [-1,\,1]$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen für $k = 0$.
(b) Bestimme das exakte Volumen zwischen der (x, y)–Ebene und der Funktionsfläche über G in Abhängigkeit von k.
(c) Wie gross muss k gewählt werden, damit dieses Volumen auf 1 normiert werden kann?
(d) Bestimme für $k = 0$ die x– und die y–Koordinate des höchsten Punktes auf der Funktionsfläche, den man erreichen kann, wenn man sich in der Projektion in G längs der Geraden $y = 2\,x - \frac{1}{2}$ bewegt. %

(e) Bestimme das Volumen zwischen der (x, y)–Ebene und der Funktionsfläche von $h(x, y) = \cos((x + y)^2 + (x - y)^2)$ über der Kreisscheibe mit Zentrum in O und dem Kreisradius $r = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Ein Gebäude G mit viereckigem, aber nicht rechteckigem Grundriss ragt bei den Koordinaten $A_1(0, 0, 0)$, $B_1(2, 0, 0)$, $C_1(3, 4, 0)$ und $D_1(0, 3, 0)$ aus dem Boden. Die Koordinatenzahlen kann man als Dekameter verstehen, wenn einem das die Sache damit vereinfacht. Oben ist ein pultartiges Dach mit den Eckpunkten $A_2(0, 0, \frac{1}{2})$, $B_2(2, 0, \frac{2}{3})$, $C_2(3, 4, 1)$ und $D_2(0, 3, z)$. Φ sei die ebene Dachfläche.

(a) Erstelle eine saubere Skizze.

(b) Berechne z.

(c) Berechne den Inhalt von Φ.

(d) Berechne das Gebäudevolumen V_G.

(e) Wie ändert sich V_G, wenn man alle Grundrisskoordinaten verdoppelt?.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Gegeben ist Gerade $g:\ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $P_1(6, -3)$, $P_2(7, 2)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$ für die Geradenspiegelung an g.

(b) Spiegle damit die Punkte, d.h. berechne die Bildpunkte Q_1 und Q_2.

(c) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q_1$.

(d) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $S(g)$. Welcher interessante Zusammenhang ist hier sichtbar?

Aufgabe 5 **(18 Punkte)**

Sei $A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für derartige $n \times n$–Matrizen A_n und B_n abzulesen.
Dabei ist $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Wie steht es hier mit allgemeinen Gesetzen für entsprechende $n \times n$–Matrizen?

(c) Berechne $A_3 \cdot B_3$, $B_3 \cdot A_3$, $A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3$ und $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Ist hier etwas bemerkenswert?

(d) Berechne $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1}$ und $B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$. Welche der Formeln $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$ oder $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = (B_3^{-1} \cdot A_3^{-1})^T$ ist hier richtig?

(e) Löse die Gleichung (d.h. berechne X), falls möglich:

$$A_3 \cdot B_3 \cdot A_3 = B_3 \cdot X \cdot B_3$$

(f) Löse die Gleichung (d.h. berechne X), falls möglich:

$$(B_3^{-1} - A_3^{-1}) \cdot X = A_3 + B_3$$

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe) (4 Punkte)

Gesucht ist eine Funktion, mit der man das logistische Wachstum des CO_2–Gehalts der Atmosphäre in Prozent modellieren könnte. Bekanntlich wird ja heutzutage sehr über den Anstieg dieses Gehalts diskutiert. Man hat sich entschlossen, eine Funktion aus den folgenden drei Typen auszuwählen und danach die Massstäbe der Achsen sowie die Lage des Graphen an die Gegebenheiten der tatsächlich vorhandenen Jahreszahlen anzupassen. Welchen der Typen würde man wählen, falls überhaupt einer passt? (Begründung!)

(a) $f(t) = e^{2\,t+2}$

(b) $f(t) = 100\,e^{-\frac{2\,\arctan(5-t)}{\pi}-1}$

(c) $f(t) = 100\,e^{\sin\left(\frac{t}{5}\right)-1}$

— ENDE —