Modulprüfung
2010
Klasse M 09a / M 1a
Mathematik: Lin. Alg. + Geom.

Zeit: 120 Minuten

Teil 1: 30 Minuten, dann Abgabe
Teil 2: 90 Minuten

WIR1-2010 / 21 (+2) Anzahl / Burgdorf / Raum M303
Mi 03.02.2010 / Zeit 14.00-16.00

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, können vier Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 M 09a / M 1a

Teil 1: Ohne Hilfsmittel, Zeitrahmen 30 Minuten, anschliessend Abgabe

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Kurzaufgaben. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar" zu schreiben.

Probl. 1 Angaben: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -b & b & b \\ a & c & c \\ c & a & c \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b & b & c \\ a & -a & a \\ c & c & b \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} b & b & a \\ a & -b & a \\ -c & c & b \end{pmatrix}, \ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}\, i, \ z_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, i, \ z_3 = 3 - 2\, i$$

(a) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(A)$ und untersuche dann, für welche Werte von a, b, c die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(b) Zeige von Hand die Berechnung von $\det(B)$ und untersuche dann, für welche Werte von a, b, c die Determinante 0 ist. **(3 Punkte)**

(c) Wie gross sind $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(A \cdot B)$ sowie $\det(B \cdot A)$ für $a = 1, \ b = 0, \ c = -1$? **(3 Punkte)**

(d) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für $a = 1, \ b = 0, \ c = -1$. **(3 Punkte)**

(e) Wie gross ist $\det(C)$ und $\det(A \cdot C)$ sowie $\det(B \cdot C)$ für $a = 1, \ b = 0, \ c = -1$? **(3 Punkte)**

(f) Es soll gelten: $\det(B \cdot C) = 16$, wobei $b = 0$ und $c = -1$ gesetzt werden. Wie gross muss dann $a \in \mathbb{R}$ sein? **(3 Punkte)**

(g) Löse für $a = 1, \ b = 0, \ c = -1$ die Gleichung $C \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$. **(3 Punkte)**

(h) Berechne die Inverse der Matrix $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **(3 Punkte)**

(i) Löse mit G von oben die Gleichung $G^{-1} \cdot (E - X^T + G) \cdot G = G \cdot G$. **(3 Punkte)**

(j) Berechne exakt von Hand $\bar{z}_1 \cdot z_2^{-1}$. **(3 Punkte)**

(k) Skizziere die Lösungen von $z^6 = z_1$. **(3 Punkte)**

(l) Berechne von Hand $\dfrac{(z_2)^2 + z_2}{z_3}$. **(3 Punkte)**

Probl. 2 Angaben: Gegeben sind die unten folgenden Matlab–Befehle.

(a) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=0:0.1:pi;y=sin(x);plot(x,y)
```

(Bitte Output so darstellen, wie er etwa auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(b) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
x=3; y=2; clear; y=3; z=(x*y)^(1/2)
```

(Output sinngemäss so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(c) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
exp(1) - log10(10)
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(d) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
((0:5)-5)*5
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(e) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
u=[2*3,4,sqrt(25)]; v=[u' (4+u)' 2*u']
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

(f) Was ist der MATLAB-Output für den folgenden Befehl? **(3 Punkte)**

```
v*v
```

(Bitte Output so notieren, wie er auf dem Bildschirm erscheinen wird.)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf 03.02.2010

Modulprüfung in lin. Alg. + Geo. 2010 — M 09a / M 1a

Teil 2: Zeitrahmen 90 Minuten

Viel Glück !

Löse die nachfolgenden Aufgaben. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.
Im Falle einer unlösbaren Aufgabe ist als Resultat „unlösbar“ zu schreiben.

Probl. 3 **(15 Punkte)**

Gegeben sind vier Punkte im Raum: $P_1 = P_1(2;\,-1;\,0)$, $P_2 = P_2(3;\,4;\,0)$, $P_3 = P_3(1;\,6;\,0)$, $Q = Q(1;\,5;\,7)$. Berechne die folgenden Masse numerisch auf 4 signifikante Stellen genau:

(a) Berechne den Mittelpunkt M des Kreises, auf dem P_1, P_2 und P_3 liegen.

(b) Berechne den gespiegelten Punkt M' von M bezüglich der Geraden $g = g(P_1, P_2)$.

(c) Berechne damit den Winkel $\angle(M, P_3, M')$.

(d) Berechne das Volumen des (nicht regulären) Tetraeders, das durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und Q gebildet wird.

(e) Berechne den Abstand der Punkte M und P_3 von der Geraden g.

Probl. 4 **(9 Punkte)**

Gegeben sind $p(x) = \dfrac{-4\,x^5 - 8\,x^4 - 9\,x^3 - 5\,x^2 + x - 1}{x^2\,(x+1)}$
und $q(x) = \dfrac{-4\,x^4 - 4\,x^3 - x^2 - x + 4}{(x-1)\,(x+1)}$.

(a) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $p(x)$.

(b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $q(x)$.

(c) Bestimme damit die Partialbruchzerlegung von $p(x) - q(x)$.
Untersuche damit die Frage: Worin unterscheidet sich die Partialbruchzerlegung von $(p(x) - q(x))$ von den Zerlegungen von $p(x)$ und $q(x)$?

Probl. 5 **(9 Punkte)**

Gegeben sind die 8–ten Einheitswurzeln $z_k = e^{k\,i\,\frac{2\pi}{8}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots 8$. Diese Zahlen sind bekanntlich die Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$.

(a) Skizziere die Zahlen $u_k = -z_k, k = 1, 2, 3, \ldots 8$, so exakt wie möglich in einem Diagramm. Von welcher Gleichung sind diese Zahlen u_k die Lösungen?

(b) Berechne numerisch die Zahlen $w_j = \sum\limits_{k=1}^{j} z_k$, $j = 1, 2, 3, \ldots 8$. Skizziere diese Zahlen in einem Diagramm.

(c) Was kann man anhand des Diagramms nun zur speziellen Lage der Zahlen w_j vermuten? Begründung? (*Hinweis:* Beachte die genaue Skizze der entstehenden Figur!)

Probl. 6 **(15 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A \cdot A$ und $A \cdot A \cdot A$. Was fällt am Resultat auf?

(b) Berechne $B \cdot B$ und $B \cdot B \cdot B$. Was fällt am Resultat auf?

(c) Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Was stellt man fest?

(d) Löse die Gleichung $A \cdot B \cdot A + A = X \cdot B \cdot B + B$.

(e) Seien $\vec{x}_1 = \vec{0}$ ($\vec{x}_2 = (1, -1, 0, 1, -1)^T$). Berechne $A \cdot \vec{x}_1$ und $A \cdot \vec{x}_2$.
Was stellt man fest?

Probl. 7 **(6 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt im Ursprung ($M_1 = O$) und einem Radius $R_1 = 5$. Dazu ist noch eine zweite Kugel K_2 gegeben mit dem Mittelpunkt $M_2 = M_2(5;\ 5;\ 5)$ und einem Radius $R_2 = 6$. Durch die Schnittkurve der beiden Kugeln kann man eine Ebene Φ legen. Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse.

Probl. 8 **(6 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1 = P_1(1;\ 0;\ 0)$, $P_2 = P_2(0;\ 2;\ 0)$ und $P_3 = P_3(0;\ 0;\ 3)$ ist eine verspiegelte Ebene Γ gegeben. Vom Punkte $Q_1 = Q_1(4;\ 0;\ 0)$ wird ein Lichtstrahl ausgesendet, welcher nach Reflexion in einem Punkt $L \in \Gamma$ auf den Punkt $Q_2 = Q_2(1;\ 5;\ 1)$ trifft. Berechne die Koordinaten des Punktes L.
(*Hinweis:* Mache dir eine Skizze und überlege anhand dieser, was die Spiegelung von Q_2 an Γ nützen könnte.)

— ENDE —