Modulprüfung
2010
Klasse B 09 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2010/ 32 (35) /Burgdorf/ BU 131
15.09.2010/ Zeitfenster 08:30 – 10:30

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. **Resultate ohne Herleitung werden nicht als Gesamtlösung akzeptiert.**
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.01% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 15.09.2010

Modulprüfung in Mathematik 2010 Klasse B 09 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 bis 5 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).

Aufgabe 1 **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(e^{2x}-1)},\quad I=D_f=[-5,\,5].$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall I.

(b) Bestimme den Steigungswinkel des Graphen für $x=-1$.

(c) Bestimme Nullstellen und Polstellen im Intervall I.

(d) Bestimme rechnerisch die Extremwertstellen im Intervall I.

(e) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte im Intervall I.

(f) Bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x\to\infty$ und für $x\to-\infty$.

(g) Bestimme numerisch die Approximation von f durch das Taylorpolynom $p_{3,\,-3}(x)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0=-3$.

(h) Berechne damit numerisch $A_1=\int\limits_{-4}^{-2}p_{3,\,-3}(x)\,dx$.

(i) Sei $A_2=\int\limits_{-4}^{-2}f(x)\,dx$. Ermittle die ersten 4 Ziffern von $d=|A_2-A_1|$.

Aufgabe 2 **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen:

$$\begin{aligned}f_1(x,y)&=1+\sin(x+y)\\f_2(x,y)&=1+\sin(x\,y)\\f_3(x,y)&=1+\sin(x)+\sin(y)\\f_4(x,y)&=1+\sin(x)\,\sin(y)\end{aligned}$$

(a) Ermittle die 3D–Graphen und entscheide, welche Funktion das beste Modell einer Eierschachtel ergibt. Entscheide ebenso, welche Funktion das beste Modell für Wellblech ausmacht.

(b) Berechne $V_1=\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}f_3(x,\,y)\,dx\,dy$ und $V_2=\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}f_4(x,\,y)\,dx\,dy$. Entscheide damit, ob V_1 oder V_2 das grössere Volumen ist.

(c) Berechne für beide Funktionen beim Wert $x=0$ die Weglänge auf der Funktionsfläche längs der y–Achse von $y_1=-2\,\pi$ bis $y_2=+2\,\pi$. Welche Weglänge ist grösser?

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $h(x,\, r) = \sqrt{100 - x^2} - r$ über $I = [6,\, -6]$. Lässt man $h(x,\, r)$ über I um die x–Achse rotieren, so erhält man bei geschickter Wahl von r eine Säule. Stellt man diese Säule senkrecht, so bemerkt man, dass sie in der Mitte am dicksten und an den Enden am dünnsten ist, was sicher bei dicken Leuten zu Diskussionen über den rechten Geschmack Anlass gibt. (r ist im Moment Parameter.)

(a) Skizziere die Säule für $r = 7$ und für $r = 8$. Was stellt man fest?

(b) Sei $A(r)$ der Flächeninhalt der Grund– oder Deckfläche, falls die Säule senkrecht steht. Das Volumen $V(r)$ kann als Mass für ihr Gewicht und $q(r) = V(r)/A(r)$ als Mass für den Gewichtsdruck auf die Grundfläche interpretiert werden. Berechne $q(7)$ sowie $q(8)$.

(c) Berechne dasjenige r, für welches $q(r) = 25$ gilt, falls das möglich ist.

(d) Bestimme den Oberflächeninhalt der Säule ohne die Grund– und Deckfläche für $r = 7$.

Aufgabe 4 **(21 Punkte)**

Der Ursprung O und die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bestimmen die Ebene Φ.

Dazu sei $P = P(-1,\, 2,\, 3)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix S für die Spiegelung an Φ.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.

(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{5}$ in der Grundebene (um die z–Achse).

(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.

(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels S zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.

(f) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit der ein Punkt auf Φ projiziert werden kann. (Man überlege sich dazu, was die Projektion mit der Spiegelung zu tun hat und wie man die Eigenwerte der Speigelungsmatrix abändern müsste, um eine Projektion zu erhalten.)

(g) P_4 sei die Projektion von P_3. Bereche P_4.

Aufgabe 5 **(27 Punkte)**

Die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix A zusammengefasst.
Ebenso fasst man die Vektoren $\vec{b}_1 = 2 \cdot \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix B zusammen.

(a) Berechne die Eigenwerte von A.
(b) Berechne die Eigenwerte von B.
(c) Gibt es zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche?
(d) Gibt es zwischen den Eigenvektoren der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche? (Nummerierung beachten, dezimal!)
(e) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.
(f) Berechne die Summen der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.
(g) Berechne die Produkte der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.
(h) Berechne die Determinanten von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob ein Zusammenhang zu der vorhergehenden Teilaufgabe besteht.
(i) Gegeben ist der Punkt $Q(0, -2, 2)$. Sei $\overrightarrow{OP}_1 = A \cdot \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP}_2 = B \cdot \overrightarrow{OQ}$. Berechne $\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1$. Erkläre das Resultat.

Aufgabe 6 **(4 unabhängige Aufgaben, 24 Punkte)**

(a) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär seien:

$$B \cdot (B + X) \cdot B + B = B \cdot B^T + E - B^{-1}$$

(b) $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i. Berechne U_1^2, U_1^3, U_1^4. Was fällt auf?
ii. Berechne $U_1^2 \cdot U_1^2$, $U_1^3 \cdot U_1$ und $U_1 \cdot U_1^4$. Was fällt auf?

(c) Gegeben sind die Gleichungssysteme $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i. Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).
ii. Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.
iii. Berechne in etwaigen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).
iv. Berechne den Rang der Matrix U_2.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

(d) Gegeben sind zwei Geraden:

$$g_1:\ \vec{v_1}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{v_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sie sich? — Berechne ihren Abstand, falls sie sich nicht schneiden.

Aufgabe 7 **(Zusatzaufgabe, 18 Punkte)**

Durch $A = A(3;\,1;\,4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2;\,0;\,4)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e_1}$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_c$, $\vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix M, welche $\vec{e_1}$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e_2}$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e_3}$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von M^{-1} den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ in $\overrightarrow{OP'}_1$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'}_1$ um die $\vec{e_1}$–Achse (mit Blick Richtung O) in $\overrightarrow{OP'}_2$ um den Winkel $\frac{2\,\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'}_2$ um $\frac{2\,\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'}_3$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'}_2$ und $\overrightarrow{OP'}_3$ wieder mit M zurück ab in $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OP_3}$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in O. Berechne P_2 und P_3.

(f) Berechne das Volumen der Pyramide, falls es existiert.

— ENDE —