Modulprüfung
2011

Klasse Mp 09p / M2p

Mathematik 1 (2. Jahr):
Analysis 3 und Statistik 1

Zeit: 120 Minuten Analysis, getrennt dazu 60 Minuten Statistik
Total 180 Minuten Arbeit

WIR1-2011 / 16 (+ 3) / Burgdorf / Raum E216
Do 03. 02. 2011 / 13.30 - 16.45 Uhr (13.30 - 15.30 Uhr Analysis 3, 15.45 - 16.45 Uhr Statistik)

Allgemeine Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's usw. nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- Mittleres Richtziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, sollten mindestens vier solche Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollen.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 03. 02. 2011

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp09 / Mp2

Viel Glück !

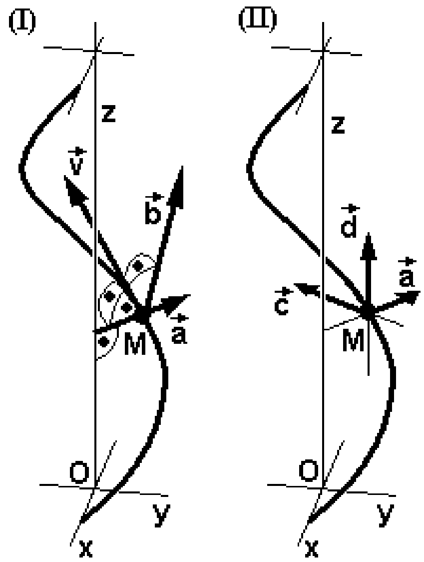
Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Volumen von Schraubenlinienkörpern:

Gegeben ist eine Schraubenlinie

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t) \\ r_0 \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1].$$



Diese Schraubenlinie verläuft auf einem Zylinder mit der Radius r_0. Daher ist der in den Skizzen gezeigte Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf der Zylindermantelfläche und somit auf der Schraubenlinie. $\vec{d}$ ist parallel zur z–Achse. Die normierten Vektoren $\vec{v},\ \vec{a},\ \vec{b}$ bzw. $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}$ bilden ein begleitendes Dreibein paarweise rechtwinkliger Vektoren (ONS).

Weiter ist $\vec{s} = \vec{s}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ der Ortsvektor von $M(t)$. $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ist der Tangentenvektor an die Schraubenlinie in $M(t)$.

Weiter sei $r = r(t) := r_0\,(1 - \dfrac{t}{2\,\pi})$.

Im Falle (I) wird durch $\vec{k_1}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{b(t)}\,\sin\varphi)$ ein auf der Kurve senkrecht stehender Kreis definiert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ eine in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_1}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_1}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + \vec{k_1}(t,\,\varphi)$.

Im Falle (II) wird durch $\vec{k_2}(t,\,\varphi) = r(t)(\vec{a(t)}\,\cos\varphi + \vec{c(t)}\,\sin\varphi)$ ein horizontaler Kreis deniniert, der zusammen mit $\vec{s(t)}$ einen in einen Spitz auslaufende Fläche $\vec{f_2}(t,\,\varphi)$ im Raum ergibt: $\vec{f_2}(t,\,\varphi) = \vec{s}(t) + t,\,\vec{k_2}(\varphi)$.

(a) Skizziere die beiden durch die Flächen definierten Körper. (3 Punkte)

(b) Berechne das durch f_1 definierte Volumen V_1. (3 Punkte)

(c) Berechne das durch f_2 definierte Volumen V_2. (3 Punkte)

(d) Berechne das Kegelvolumen V_3, welches durch denselben Grundkreis wie bei f_2 und der Kegelhöhe $2\,\pi$ (Ganghöhe) gegeben ist. Berechne daraus das Verhältnis $V_3 : V_2$. (3 Punkte)

Aufgabe 2 **(21 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \cos(2\,t) + \cosh(3\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = e^{t-8}\, e^{-2\,t+3} \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = e^{-t}\,(\cos(t) - 2) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = (-t)^3 + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{4\,s}{2\,s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 1 + \dfrac{2}{s} + \dfrac{-2}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t) = \,?$ (3 Punkte)

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung $\quad y\,'(t) = -y(t) + \delta(t) + a\,\sin(t),\;\; y(1) = 1.$

(a) Sei in obiger Gleichung $y(t,\,a) := y(t)$. Setze $a = 1$. Berechne $y(t,\,1) := y_1(t)$. (3 Punkte)

(b) Skizziere die eben gefundene Funktion über dem Bereich $D = [0, 2]$ und berechne $y(0.5)$ sowie $y(2)$. (3 Punkte)

(c) Bestimme die Funktion $z(a) := y(2, a)$ und skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y\,''(t) - y\,'(t) - 2\,y(t) = \frac{1}{2}\,cosh(t),\;\; y(0) = 1,\;\; y\,'(0) = -1.$$

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) - z'(t) - z(t) &= 0 \\ y'(t) + y(t) + z'(t) + z(t) &= e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5,\, 3]$.

Aufgabe 6 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

$y'(t) = y(t) \cdot e^{-t} + e^{-2\,t}, \;\; y(0) = 0.$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.75) := y_{Euler}(1.75)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.5$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.75) - y_{exakt}(1.75)|$ (3 Punkte)

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung allgemein:

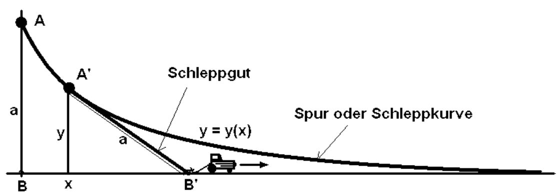
$y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 1 + a \cdot t, \;\; y(0) = 0.$

(a) Berechne die allgemeine Lösung $y(t,\, a)$, falls möglich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. (5 Punkte)

(b) Von vievielen Parametern oder Variablen hängt die Lösung ab?. (1 Punkte)

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Praktisches Beispiel:



Gegeben ist eine Schleppkurve (Bild). Ein Massenpunkt A ist hier an einem Seil der Länge a befestigt. A liegt anfangs auf der y–Achse. Das freie Seilende B befindet sich im Koordinatenursprung. Durch die Bewegung des Fahrzeugs wird das Seilende B der positiven x-Achse entlang geführt. Dabei beschreibt der hinterher gezogene Punkt A die Schleppkurve. Vorausgesetzt ist Gleitreibung.

(a) Modelliere die geometrische Situation durch eine Differentialgleichung:

$$y'(x) = \ldots = ?$$

(3 Punkte)

(b) Überprüfe, welche der folgenden Ausdrücke Lösungen der Differentialgleichung sind:

$$(a) \qquad y(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \qquad (b) \qquad y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$$

$$(c)\ x(y) = a\ \ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - a\ \ln(y) - \sqrt{a^2 - y^2}$$

(3 Punkte)

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Freitag, Donnerstag 03. 02. 2011

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp09 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

Entscheidungsproblem:

Von einem neuen Flugzeugtyp ist eben bekannt geworden, dass bei 5 % der Maschinen bei einem Flug über Calamita (ein „Eisenberg", dessen Erz ein Metallgehalt von über 70 Volumenprozente aufweist), die Funkverbindungen ausfallen und die Sender im Flugzeug ca. eine halbe Stunde lang Notsignale aussenden. Die Chance, dass es sich bei einem Flugzeug, welches Notsignale aussendet, um ein terroristischer Angriff handeln könnte und dass das Sendesystem manipuliert werden konnte, wird von der Herstellerfirma der Software mit 0.1 % angegeben. Nun fliegt ein solches Flugzeug, das Notsignale aussendet, aus Richtung Calamita etwas zu hoch gegen die nächst gelegene Flughafenzone, hinter der sich ein Spital mit ca. 100 Menschen befindet. Im Flugzeug sitzen vermutlich 10 Menschen. Man hat 3 Minuten zur Entscheidung für einen Abschuss. In dieser Zeit kann das Spital nicht evakuiert werden.

(a) Berechne hier die Wahrscheinlichkeit eines terroristischen Angriffs in der beschreibenen Situation. (6 Punkte)

(b) Begründe einen etwaigen Abschussentscheid oder den Gegenentscheid. (3 Punkte)

Aufgabe 2 **(9 Punkte)**

Personal- und Montageprobleme:

(a) In den nächsten Ferien könnte es eng werden in der Fabrikation. Von den 128 Mitarbeitern mieten 89 einen Parkplatz und besitzen daher ein Auto. Die andern erscheinen mit dem Velo zur Arbeit. Unser Betrieb hat es sich an Weihnachten zur Ehre gemacht, jedem Familienvater, der schulpflichtige Kinder hat, einen Velohelm zu schenken. So sind 62 Helme verschenkt worden. Fahrgemeinschaften bei den Autofahrern gibt es wegen der fliessenden Arbeitszeit keine. Die Autofahrer haben sich verpflichtet, nach Arbeitsschluss jeweils noch Waren für den Direktverkauf in ihrer Umgebung auszutragen, welche bei hohen Temperaturen rege bestellt werden. Genaue Angaben über die privaten Belange der Mitarbeiter gibt es sonst keine. Berechne falls möglich die Chance, dass ein Mitarbeiter während den Sommerschulferien nicht in den Urlaub reist unter der Bedingung, dass er Autofahrer ist und daher nach der Arbeitszeit noch Ware ausliefern kann. (3 Punkte)

(b) Ein Mechaniker entfernt an einer Maschine 7 Schraubenmuttern, alles Muttern mit $M10$–Gewinden, wie der denkt. Als er dann die Muttern nach dem Mitagessen genau betrachtet stellt er fest, dass 3 davon selbstsichernde Muttern mit eingelassenem Kunststoffsicherungsring sind. Eine hat sogar eine Nut eingefräst, wodurch sie nach dem Einbau in das Gehäuse von oben durch eine Rohröffnung mit dem Schraubenzieher gelocker und wieder angezogen werden kann. Die Montage des Gehäuses benötigt drei Stunden. Was ist die Chance, die Muttern zufällig richtig wieder zu montieren? (3 Punkte)

(c) Auf wieviele Arten kann bei einer Belegschaft von 14 Personen an 5 Mitarbeiter ein Bonus ausbezahlt werde, wenn es erlaubt ist, dass ein Mitarbeiter maximal 2 Boni kassieren kann und daher weniger als 5 Mitarbeiter etwas bekommen? (3 Punkte)

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

Qualitätsprognose:

(a) Wie gross ist die Chance, dass aus einer Lieferung von 28 Hochleistungspumpen 6 Pumpen, welche in einem unbewohnten, wettergeplagten Hochtal in Punkern verschlossen eingebaut werden, eine Dauerbetriebsdauer von mehr als 1 Jahr haben werden, wenn man durch Versuche herausgefunden hat, dass von 10 Pumpen nur 3 Stück diese Qualität aufgewiesen haben. (6 Punkte)

(b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugehörigen Verteilung. (3 Punkte)

Aufgabe 4 **(9 Punkte)**

Regression:

Gegeben sind die Fakultäten $k!$ der Zahlen von $k = 1$ bis $k = 12$ und damit die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, k!)$. Es ist sofot klar, dass diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen können.

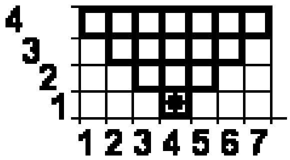
(a) Versuche daher herauszufinden, ob eher die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, \ln(k!))$ auf einer Geraden liegen. Berechne dazu die zugehörige Funktion der Regressionsgeraden $y_1(x) = a_1\, x + b_1$. (3 Punkte)

(b) Versuche daher herauszufinden, ob vielleicht vielmehr die Punkte $(x(k),\, y(k)) = (k,\, \ln(k!))$ auf einer Parabel liegen. Berechne die zugehörige Funktion der Regressionsparabel $y_2(x) = a_2\, x^2 + b_2\, x + c_2$. (3 Punkte)

(c) Berechne die zugehörigen Fehlerquadratsummen $s_1 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_1(k))^2$ und auch $s_2 = \sum\limits_{k=1}^{12} ((\ln(k!) - y_2(k))^2$ und beurteile, ob man mit der quadratischen Regression den Wert von s_1 halbieren kann. (3 Punkte)

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Qualitätskontrolle:



In einem quadratischen Raster der Grösse 7×4 werden zufällig die Pixel schwarz oder weiss gefärbt. Was ist die Chance, dass das Pixel mit dem Markierpunkt unten (siehe Skizze, Startpixel **SP**) schwarz ist und sich dabei mindestens eine schwarze Linie vom Punkt **SP** nach oben (im fett dargestellten Bereich) ausbildet, in der immer schwarze Pixel entweder an der horizontalen Kante oder an einer Ecke „oben rechts — unten links“ oder „oben links — unten rechts“ zusammenstossen?

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Datensätze:

Gegeben sind zwei Datensätze M_1 und M_2:

$$M_1 = \{44.0, 50.5, 51.4, 48.9, 52.3, 55.4, 54.5, 57.3, 58.4, 63.3, 65.9, 66.6\}$$

$$M_1 = \{44., 47.5, 47.1, 52.2, 49.9, 50.6, 52.5, 58.3, 58.6, 59.1, 61.8, 64.3\}$$

Dabei handelt es sich um die Temperaturmessungen an zwei gleichen belasteten Wellen am selben Tage etwa alle 15 Minuten nach der selben Startzeit.

(a) Berechne von den beiden Datensätzen jeweils Mittelwert, Median und Standardabweichung. (3 Punkte)

(b) Stelle die Datensätze in einem Box–Whiskers–Plot einander gegenüber. (3 Punkte)

(c) Bestimme zu den Datensätzen jeweils die Regressionsgerade numerisch und zeichne die Daten mit der Gerade je in ein Diagramm ein. (1. Datenelement bei 15 Minuten, Zeit in Minuten.) (3 Punkte)

(d) Beurteile die Bonität oder Güte der Daten unter der Annahme, dass sich eine Welle im Betrieb mit der Zeit vermutlich konstant erwärmen muss. (3 Punkte)

— ENDE —