Modulprüfung
2012

Klasse Mp 10p / M2p

Mathematik 1 (2. Jahr):
Analysis 3 und Statistik 1

Zeit: 120 Minuten Analysis, getrennt dazu 60 Minuten Statistik
Total 180 Minuten Arbeit

WIR1-2012 / 3 (+ 3) / Burgdorf / Raum E216
Do 02. 02 2012 / 13.30 - 16.45 Uhr (13.30 - 15.30 Uhr Analysis 3, 15.45 - 16.45 Uhr Statistik)

Allgemeine Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's usw. nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind in der Regel zwölf Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen. Andernfalls gelten die angegebenen Punktezahlen.
- Mittleres Richtziel: Wenn an einer vollen Prüfung von zwei Stunden mehr als vier grössere Aufgaben mit zwölf oder mehr Punkten gegeben sind, sollten mindestens vier solche Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollen.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 02. 02. 2012

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Analysis 1 Mp10 / Mp2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Volumenberechnung:

Ein Quader wird achsenparallel in ein Koordinatensystem gestellt, wobei sich eine Ecke im Ursprung befindet. Die andern begrenzenden x–, y– und z–Koordinaten sind $x_1 = 30$, $y_1 = 10$, $z_1 = 20$. Nun wird längs der Geraden $y = 2\,x - 20$ in der $x - y$–Grundebene eine Nut in den Körper gefräst, welche in der $x - z$–Grundebene die Begrenzungskurve $z = (x - 10)^2$ aufweist.

(a) Erstelle zur Orientierung vom Körper im Koordinatensystem mit der Nut eine 3–D–Skizze und beschrifte die Koordinaten sowie die definierende Kurve.

(b) Berechne die Länge der Begrenzungskurve in der $x - z$–Grundebene.

(c) Berechne das ausgefräste Volumen sowie das Volumen des Restkörpers.

(d) Berechne den Radius einer zur Nut volumengleichen Bohrung im Körper, welche parallel zur Nut verläuft.

Aufgabe 2 **(21 Punkte)**

Laplace–Transformationen und Rücktransformationen:

Berechne für die nachstehend gegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = \sin(3\,t) + \sinh(2\,t) - t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(b) $f(t) = 2 - t + \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(c) $f(t) = (2 - e^{-t})\,(\sin(t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(d) $f(t) = e^{1+2\,t}\,e^{1-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = \,?$ (3 Punkte)

(e) $Y(s) = \dfrac{s}{4\,s^2 - 2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(f) $Y(s) = \dfrac{1}{s^4 - 1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

(g) $Y(s) = 2 + \dfrac{1}{2\,s} + \dfrac{1}{(s-1)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(t) = \,?$ (3 Punkte)

Aufgabe 3 **(9 Punkte)**

Differentialgleichung:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = c + \cos(t) - t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$$

(a) Berechne die Lösung $y(t,c)$ für $c = 0$, also $y(t,0)$. (3 Punkte)

(b) Berechne bei der gefundenen Lösung c so dass $y(10,c) = 1$ gilt. (3 Punkte)

(c) Sei $y(10,c)$ der Wert der Lösung an der Stelle $t = 10$ bei variablem c. Skizziere diese Funktion in einem charakteristischen Bereich. (3 Punkte)

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

Löse die folgende Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$y'''(t) - 2\,y'(t) - \,y(t) = \,sinh(t), \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = y''(0) = 0.$$

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Differentialgleichungssystem:

Gegeben ist das AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) - z(t) &= \sin(t) \\ y(t) + z'(t) + z(t) &= e^{-t} \\ y(0) = 1, \;\; z(0) &= 1 \end{aligned}$$

Berechne die Lösung als Vektorfunktion $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und skizziere diese für $t \in [-0.5, 3]$.

Aufgabe 6 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung:

$$y'(t) = -y(t) \cdot t - t, \;\; y(0) = 1.$$

(a) Berechne $y(t) = y_{exakt}(t)$, falls möglich. (3 Punkte)

(b) Berechne $y(1.0) := y_{Euler}(1.0)$ numerisch nach Euler. Schrittweite $\Delta x = 0.25$. Berechne damit die Abweichung $|y_{Euler}(1.0) - y_{exakt}(1.0)|$ (3 Punkte)

Aufgabe 7 **(6 Punkte)**

Differentialgleichung allgemein:

$$y''(t) - 2\,y'(t) + \frac{1}{2}\,y(t) = t - b, \;\; y(0) = 0.$$

(a) Sei $y(t,\,b)$ die allgemeine Lösung. Skizziere die Lösung $y(t,\,0)$ für $b = 0, \;\; t \in [0,\,3]$.

(b) Berechne $y(t,\,b) = y(1.00,\,1.00)$.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Informatik, Fachbereich Maschinenbau, Burgdorf
Donnerstag 02. 02. 2012

Modulprüfung in Math. 1, 2. Jahr, Teil Statistik 1 Mp10 / Mp 2

Viel Glück !

Löse folgende Aufgaben! (Alle Teilaufgaben werden meistens gleich bewertet.)

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Schadenprognose

Bei der Fabrikation von Präzisionsachsen sind erfahrungsgemäss 0.5 % Ausschuss. Die Chance, dass man eine geprüfte Achse als Ausschuss erkennt, ist wegen der Probleme mit den vorhandenen Prüfgeräte nur 95 %. Nun hat man den Auftrag für eine Lieferung von Geräten erhalten, zu denen $a = 1000$ Achsen eingebaut werden sollen.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass trotz des Prüfverfahrens eine qualitativ ungenügende Achse eingegaut wird. (6 Punkte)

(b) Wie gross müsste oder dürfte a sein, damit man mit einer eingebauten qualitativ ungenügenden Achse rechnen müsste? (Begründung!) (3 Punkte)

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Druckfestigkeit von Stahlguss, Vertrauensintervall, Textverständnis

Zwecks Ermittlung der Druckfestigkeit einer Sorte B von Gusseisen mit Lamellengraphit wurden $n = 45$ Messungen durchgeführt. Damit hat man ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} \pm s = 722 \pm 61\, N/mm^2$ bestimmt. $\bar{x}$ wird im gegebenen Fall als ein geeigneter Punktschätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit erachtet. Als Streuung darf man die Standardabweichung der Messreihe $s = 61\, N/mm^2$ verwenden, denn dies gehört zum Erfahrungswissen der Firma, welche die Versuche durchgeführt hat. Weiter darf vor den Hintergrund von langen normalisierten Messreihen angenommen werden, dass es sich bei der Druckfestigkeit im Bereich der vorhandenen Werte mit grosser Wahrscheinlichkeit (gestützt durch relative Häufigkeiten) um eine normalverteilte Zufallsgrösse $\bar{X}$ (mit der Normalverteilung $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$) handelt. D.h. μ wird durch $\bar{X}$ und σ durch s geschätzt. $\frac{\sigma^2}{n}$ ist die Streuung vieler Werte $\bar{X}$ (also nicht diejenige für X selbst im vorliegenden Fall. Berechne daraus für den Wert c für 95 % Vertrauensintervall $[\mu - c,\, \mu + c]$ für μ.

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Ziffernfolgen in der Dezimalbruchentwicklung von π

Gegeben sind die Werte

$$M_1 = \{3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5\} \text{ und}$$
$$M_2 = \{1, 0, 5, 8, 2, 0, 9, 7, 4, 9, 4, 4, 5, 9, 2, 3, 0, 7, 8, 1, 6, 4, 0, 6, 2, 8, 6, 2, 0, 8, 9, 9, 8, 6, 2, 8, 0, 3, 4, 8, 2, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 7, 0\}.$$

(a) Ermittle in beiden Fällen den Mittelwert und die Streuung.

(b) Wir gehen von der Annahme aus, dass die Ziffern Werte einer Zufallsvariablen X sind und dass jede Ziffer gleich wahrscheinlich ist. Ermittle unter dieser Annahme den Erwartungswert von X, also $E(X)$ sowie den Erwartungswert von $E((X - E(X))^2)$.

(c) Vergleiche die berechneten theoretischen Werte mit den tatsächlichen Werte und kommentiere das Resultat.

(d) Denke die Werte von M_1 und von M_2 ja als y–Werte in einem $x - y$–Diagramm. Der Abstand auf der x–Achse wird jeweils 1 gewählt, in beiden Fällen beginnend mit $x_1 = 1$. Berechne daraus die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden $g_1(x) = a_1\,x + b_1$ und $g_2(x) = a_2\,x + b_2$.

(e) Kommentiere das Resultat.

Aufgabe 4 **(18 Punkte)**

Kombinatorisches und Wahrscheinlichkeit

(a) In einer Werkstatt befinden sich 10 Werkbänke und 10 Mechaniker. Wie kann man die Paare „(Mechaniker, Werkbank)“ in einem Diagramm darstellen und wieviele Paarbildungen sind möglich?

(b) Auf wieviele Arten kann man die Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe auf die Werkbänke verteilen?

(c) Jeder Mechaniker in der vorangehenden Teilaufgabe bekommt seinen Lohn in einer Lohntüte zusammen mit einer Abrechnung. Die Sekretärin übergibt dem Postboten die Tüten mit dem Auftrag, diese vor Arbeitsbeginn den Mechanikern auf jeweils ihren Werkbank zu legen. Sie hat aber vergessen, die Adressen aufzukleben. Nichts Böses ahnend führt der Postbote seine Arbeit aus. Was ist die Chance dass jeder Mechaniker seinen richtigen Lohn ausgehändigt bekommen hat?

(d) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(e) Von den 10 Mechanikern bekommen 3 eine Gehaltserhöhung nach der folgenden Abstufung: einer bekommt 50 % mehr, ein zweiter 30 % und ein dritter nur 10 %. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

(f) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mechaniker Hanspeter Hansenhans–Peter, einer von den 10, eine Gehaltserhöhung bekommt?

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Vergleich von Datensätzen

Gegeben sind zwei Datensätze D_1 und D_2, welche mathematisch nach dem folgenden Gesetz berechenbar sind:

$$D_1 = \{x_k \,|\, k = 0, \ldots, 10,\ \ x_k = \left(\frac{k}{10}\right)^2\}$$

$$D_2 = \{y_k \,|\, k = 0, \ldots, 10,\ \ y_k = \left(\frac{k}{10}\right)^3\}$$

(a) Erstelle für die beiden Datensätze je den Box-Whiskers-Plot

(b) Kommentiere die Resultate wie folgt: Beurteile, wie sich die Verschiedenheit der Datensätze graphisch ausdrückt und ob man anhand der Graphik erschliessen kann ob es sich um zwei verschiedene Datensätze handelt.

Aufgabe 6 **(6 Punkte)**

Vorzeichentest

Nach der Einstellung von 35 neuen Mitarbeitern wird die Qualität ihrer Arbeit mittels an die Kunden verschickter Frabebogen ermittelt. Die Arbeit der neuen Mitarbeiter bestand darin, mit je zweien dieser Kunden Verhandlungen zu führen, und dies je in farblich anders ausgestatteten Räumen. Dazu wurden bei jedem Mitarbeiter nacheinander zwei farblich verschiedene Verhandlungsumgebungen eingerichtet.
Für die Umgebung U_1 war kennzeichnend, dass die Verhandlungen je in Räumen stattfanden, in denen Wände, Böden und Möbel, also alles nur rote Farbe aufwies. Für die zweite Umgebung U_2 war es kennzeichnend dass gar kein rot, dafür aber nur graue und beige Farbtöne vorhanden waren. Als Resultat stellte sich heraus, dass die Kunden bei 24 der neuen Mitarbeiter in den roten Räumen weniger zufrieden waren als in den grauen und beigen Rämen. Bei den Kunden von 3 Mitarbeitern war das Resultat bei beiden Farben gleich. Bei den restlichen Mitarbeitern war das Reslultat bei rot besser.
Teste nun die Hypothese H_0: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg keine Rolle“ gegen die Alternativhypothese H_1: „Die Raumfarbe spielt für den Erfolg eine wesentliche Rolle“. Berechne dazu die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme von H_0 im betrachteten Fall dennoch eine einseitige Abweichung der Resultate aus den beiden verschiedenfarbigen Umgebungen auftreten kann. Gelingt es hier, die Hypothese H_0 aufrecht zu erhalten, wenn man der Alternative höchstens eine Wahrscheinlichkeit von 5 % zubilligt?

— ENDE —